Gravitação

Aron Maciel

1 Contexto Histórico

Assim como a maior parte da física clássica, quase tudo que nós sabemos sobre Gravitação se baseia na observação do universo. Há registros dessas observações que pré-datam a civilização humana. Porém as primeiras explicações a respeito dos corpos celestes envolviam intervenções de deuses, ou seja, apresentavam como fundamentos conceitos religiosos, místicos e míticos. Foram os Filósofos Gregos que realizaram os primeiros estudos com certo grau de análise científica, desvinculando (ao menos parcialmente) os movimentos dos corpos celestes da religião.

O modelo astronômico proposto na Antiguidade foi o modelo geocêntrico. Esse modelo teve como defensor Cláudio Ptolomeu. Esse modelo considerava a Terra como sendo o centro do Universo, ou seja, todos os astros do universo giravam em torno da Terra. O modelo Ptolomaico foi aceito sem qualquer refutação até o começo do século XVI quando Nicolau Copérnico desenvolveu a teoria Heliocêntrica do universo, o qual considerava o Sol como centro do universo e a Terra como todos os outros corpos celestes giravam em torno do mesmo.

No início do século XVII Johannes Kepler através de um complexo sistema observação e datação das órbitas dos astros, foi capaz de formular três leis fundamentais da mecânica celeste (que comentaremos de modo aprofundado mais a frente) que revolucionaram o pensamento sobre a gravitação na época, porém não existia a matemática necessária para explicar todas as observações de Kepler e dos demais pesquisadores dessa área.

Baseado nos observações de Tycho Brahe e Johannes Kepler sobre o movimento dos astros e os estudos de Galileu Galilei sobre mecânica geral, Isaac Newton apoiado em uma nova matemática de autoria própria, conseguiu não somente comprovar as leis de Kepler, mas também determinar uma lei universal para a gravitação, que diz que duas partículas quaisquer do Universo se atraem gravitacionalmente por meio de uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

$$\vec{F} = -G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{r}$$

$G = 6,67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$, é constante gravitacional universal $\hat{r}$ é o vetor unitário que determina a direção do vetor posição.

2 Leis de Kepler

Em 1609 publicou Astronomia Nova... De Motibus Stellae Martis, no qual apresentou as três leis do movimento dos planetas, que hoje levam seu nome, são elas:

- **Lei das Órbitas Elípticas:** “O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos.” Como seria demonstrado futuramente a partir da Gravitação universal, esta lei é válida para todos os corpos celestes, não somente os do Sistema solar. De fato, a Lua também percorre uma órbita elíptica ao redor da terra, assim como o sol e o sistema solar percorre uma órbita (aproximadamente) elíptica ao redor do centro da Via Láctea.

- **Lei das Áreas:** “A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.”. Em outras palavras, é observado que quanto mais próximo do astro em questão (foco da elipse) mais veloz se moverá o corpo, obtendo velocidade máxima no ponto de maior proximidade - **Periélio** - Peri (Perto) e Hélio (Sol) – e velocidade mínima – **Afélio** - aphelium, apos (Longínquo) e Hélio (Sol) –. Isso se explica, pelo fato de que a força gravitacional, é uma força central (age somente na direção radial), assim, a atração entre os corpos não pode gerar torque e, portanto, a quantidade de momento angular se conserva. Em outras palavras, a taxa de variação da área no tempo é constante:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \therefore A = \frac{r(r\theta)}{2} \leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2\omega}{2} \leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

- **Lei dos Períodos:** "Os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.". Enquanto a demonstração para a 3^a lei em órbitas elípticas requer uma matemática avançada, que foge do propósito deste material, para órbitas circulares, podemos demonstra-la com facilidade e então extrapolá-la para órbitas elípticas, temos que:

$$F_g = G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = mr\frac{4\pi^2}{T^2} \leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

  Isso nos mostra que para dos corpos orbitando um mesmo astro, temos:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

3 Energia Potencial Gravitacional

Para visualizar o conceito de energia potencial gravitacional podemos realizar um simples experimento: sobre uma mesa (que será nosso referencial no caso) levanta-se um objeto qualquer de uma certa altura, abandonando-o em seguida. Nesse momento, observa-se que o objeto ganha velocidade à medida que perde altura. Agora simplesmente deixe o objeto sobre a mesa: a não ser que uma força externa aja sobre ele, ele permanecerá em repouso, pois sua energia potencial é zero. Ou seja, podemos definir de forma simplista, a energia potencial como uma energia armazenada por um corpo que pode lhe conferir a capacidade de realizar trabalho, isto é, ganhar energia cinética, de tal forma que o trabalho da força peso será igual a variação de energia potencial.

$$W = \int_{x_o}^{x} \vec{F} \cdot d\vec{x} \to \Delta U_g(r) = W_p(r) = \int_{x_o}^{x} G\frac{mM}{r^2}dr = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right)$$

Assim, percebemos que a energia potencial depende apenas do produto das massas envolvidas, o inverso da distância entre elas, e um ponto de referência (um ponto onde conhecemos o potencial), que na maioria dos casos usaremos o "infinito" - um ponto muito distante do corpo principal, a ponto que sua influência é negligenciável - onde o potencial é zero, veja:

$$r_o >> r \therefore U_g(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Podemos também imaginar o caso onde o corpo se encontra a uma a uma certa altura em relação a superfície de um planeta, de dimensão muito menor do que o raio do mesmo, como é o caso do experimento citado acima. Nesse caso temos:

$$r = r_o + h; h << r_o \therefore \Delta U_g(h) = -GMm\left(\frac{1}{r_o+h} - \frac{1}{r_o}\right) = GMm\left(\frac{h}{(r_o+h)r_o}\right)$$

$$\Delta U_g(h) \approx m\left(\frac{GM}{r_o^2}\right)h \leftrightarrow \Delta U_g(h) \approx mgh$$

Onde g é o campo gravitacional na superfície do planeta, que aproximamos para constante ao longo da altura h.

4 Rotação e Translação

Devido as atrações gravitacionais e possivelmente colisões entre corpos celestes, esses adquirem certos movimentos, e os principais movimentos que o planeta Terra possui são a Rotação e a Translação. Cada um deles gera, individualmente ou em conjunto, diversos efeitos que são essenciais para a nossa forma de vida e sobrevivência no planeta.

- A Rotação é o movimento da terra em torno do seu próprio eixo. Ela dura aproximadamente 24 horas por ciclo e entre seus efeitos estão a existência de dia e noite; sem ela, sempre seria dia em parte do planeta e sempre seria noite na outra, fazendo com que seja muito quente de um lado e muito frio do outro, impossibilitando a vida nesses lugares. Outra consequência da rotação é o campo magnético terrestre, que é formado devido a rotação do manto terrestre o qual é rico em ferro e outros materiais ferromagnéticos.
- A Translação, por sua vez, é o movimento da terra em torno do sol. Um ciclo dela tem duração de aproximadamente 365 dias e 4 horas e é responsável por várias das mudanças climáticas durante o ano, sendo um dos motivos para a existência das 4 estações. Como o eixo de rotação terrestre possui uma angulação de 23°27' com relação ao plano da órbita da terra, há períodos do ano em que em um hemisfério os dias são maiores que as noites (Verão), enquanto no outro hemisfério os dias são menores que as noites (Inverno), há também as estações em que os dias e as noites têm a mesma duração (Outono e Primavera).

5 Exemplos

01. (Energia Mecânica) Determine a Energia Mecânica de um objeto de massa m orbitando outro de massa M em uma órbita elíptica de semi-eixo maior a. Dica: a quantidade $L = m\theta r^2$ sempre se conserva.

Solução: Sabendo que existem 2 pontos onde a energia cinética radial é zero (periélio e afélio), temos:

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = \left(-G\frac{Mm}{r}\right) + \left(\frac{m(\theta r)^2}{2}\right) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$r^2 + \frac{GMm}{E_{mec}}r - \frac{L^2}{2mE_{mec}} = 0$$

onde as raízes são $(a-c)$ e $(a+c)$, e a soma das raízes em uma equação do 2° grau (ax^2+bx+c) é ˘b/a, portanto:

$$(a-c)+(a+c) = -\frac{GMm}{E_{mec}} \therefore E_{mec} = -\frac{GMm}{2a}$$

02. (Starman) No começo de 2018, a SpaceX lançou o foguete Falcon Heavy carregando um carro, de massa m, o objetivo da missão era pôr o carro na órbita

de marte, porém por um erro de cálculo o carro irá passar direto por marte, e ficar à deriva indefinidamente, suponha que o carro chegará a uma distância suficiente onde é possível desprezar a atração gravitacional de qualquer planeta, determine:

a) A velocidade do carro, a uma altura h acima da superfície da terra, necessária, para que aconteça o caso acima.

b) A aceleração constante que os motores devem impor ao carro, para que ele adquira a velocidade do item anterior na altura h acima da superfície.

Solução: Conservando a energia total, queremos que o carro somente chegue no "infinito" com velocidade nula, assim teremos a velocidade mínima necessária:

$$\text{a)} E_{mec} = -\tfrac{GMm}{R+h} + \tfrac{mv^2}{2} = 0 \therefore V_{esc} = \sqrt{\tfrac{2GM}{R+h}}$$

Agora, utilizaremos a equação de Torricelli partindo do repouso até V_{esc}

$$\text{b)} V_{esc}^2 = 2ah \rightarrow a = \tfrac{GM}{h(R+h)}$$

*A título de curiosidade, se utilizarmos como altura, a altura da nossa atmosfera, encontraremos os valores: $v_{esc} = 11.1 km/s$ e $a = 616 m/s^2$

03. Transferência de órbitas: Um foguete de massa m está em órbita circular de raio R em torno de um planeta de massa M, e em certo ponto da trajetória, ele ativa seus propulsores recebendo um impulso I instantâneo que o faz entrar numa órbita elíptica de semieixo maior 25R. Ache I. Solução: Podemos conservar a energia mecânica em ambas as órbitas, para achar as velocidades:

$$E_{mec_o} = -\frac{GMm}{2R} = \frac{mv_o^2}{2} - \frac{GMm}{R} \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$E_{mec_f} = -\frac{GMm}{50R} = \frac{mv_o^2}{2} - \frac{GMm}{R} \rightarrow v_f = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Agora, utilizaremos a definição de Impulso $I = \Delta p$

$$I = \frac{2m}{5}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$