Análise Combinatória – AULA 1

Métodos Simples de Contagem

Tales Augusto de Almeida

1. Introdução

A primeira ideia que surge no imaginário de qualquer estudante quando ele ouve a palavra “contagem” seria exatamente o que essa palavra expressa: Ato de contar a quantidade de algo.

Assim, a contagem na combinatória seria o ato de contar a quantidade de combinações que seguem determinado critério. E nesta aula estudaremos métodos simples de contagem.

2. Primeiro contato

Vamos alguns exemplos iniciais:

Exemplo 1: Deve-se formar números de dois algarismos, no qual o algarismo das unidades e das dezenas são diferentes, utilizando apenas os dígitos 1, 2 e 3.

(a) Liste todos os possíveis números. Quantos são eles?

Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todos os possíveis números, sem repeti-los. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar a formação do número é:

- escolher o dígito do algarismo das dezenas do número;
- a seguir, escolher o dígito do algarismo das unidades do número.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que o algarismo das dezenas pode ser qualquer um dos dígitos disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, o dígito escolhido não pode mais ser usado para o círculo interno. Logo, se o dígito escolhido para ocupar a casa das dezenas for o 1, então apenas os dígitos 2 e 3 podem ocupar a casa das unidades, por exemplo.

Assim, podemos listar todos os 6 números possíveis:

→ Dígito 1 na casa das dezenas: 12 e 13;
→ Dígito 2 na casa das dezenas: 21 e 23;
→ Dígito 3 na casa das dezenas: 31 e 32.

Note que independentemente do dígito escolhido para ocupar a casa das dezenas sempre há duas maneiras de escolher um segundo dígito para ocupar a casa das unidades. Assim, o total números que procuramos é de 2 + 2 + 2 = 6;

Segue desse fato o que chamaremos de Princípio Multiplicativo:

O algarismo das dezenas pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes. Já o algarismo das unidades pode ser escolhido de 2 maneiras diferentes para qualquer que seja o dígito escolhido para ocupar a casa das dezenas. Portanto, o número total de possibilidades é de 3 × 2 = 6;

Assim, podemos enunciar que:

Se uma primeira decisão pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, uma segunda decisão pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente a primeira e a segunda decisão é igual a p × q.

(b) Quantos números podem ser formados no caso em que além dos dígitos 1, 2 e 3 também estão disponíveis os dígitos 4 e 5?

Solução: Devemos tomar as mesmas decisões do item anterior, porém, neste item temos mais algarismos disponíveis. Para cada dígito escolhido para estar na casa das dezenas há 5 – 1 = 4 dígitos que podem ocupar a casa das unidades. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, há 5 × 4 = 20 possibilidades.

Segue uma dica bem importante para os problemas de contagem:

Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Por exemplo, formar um número de dois algarismos foi dividido em decidir primeiro o dígito do algarismo das dezenas e depois em decidir o dígito do algarismo das unidades.

Exemplo 2: Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou? (OBMEP 2005 – Nível 1, Questão 15)

Solução: Os números nos bilhetes comprados por Marcelo são da forma 777X, 77X7, 7X77 ou X777, onde X representa algum dos oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Em cada um desses casos, há 8 possibilidades para os números dos bilhetes. Por exemplo, no primeiro caso, temos os seguintes oito números: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778 e 7779. Portanto, conforme o princípio multiplicativo, o número de bilhetes comprados por Marcelo é 4 x 8 = 32.

Vamos, agora, a mais uma dica que é importantíssima:

Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Exemplo 3: Quantos são os números de três algarismos distintos em que o algarismo das dezenas é menor que 5?

Solução: Há 5 modos de escolher o algarismo das dezenas. Note que começamos pelo algarismo das dezenas, que é o mais restrito; o algarismo das dezenas só pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4. Mas note que está implícito no enunciado uma outra restrição. Quando falamos em número de três algarismos diferentes estamos afirmando que o zero não pode estar na casa das centenas, uma vez que se ele estivesse então o número formado não seria de três algarismos, mas sim de dois.

Perceba que se não tivermos usado o 0 na casa das dezenas, haverá 8 modos de escolher o algarismo das centenas, pois não poderemos usar nem o 0 e nem o algarismo já usado na casa das dezenas; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o algarismo das centenas, pois apenas o 0 não poderá ser usado.

Assim, apesar de termos procurado atacar inicialmente a escolha mais restrita, chegamos a um impasse no uso do Princípio Multiplicativo. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente.

Desse modo, vamos contar separadamente a quantidade de possibilidades em que o 0 não foi escolhido para ocupar a casa das dezenas e depois contar a quantidade de possibilidades em que se escolhe o 0 para ocupar a casa das dezenas. No primeiro caso, para cada um dos dígitos escolhidos para a casa das dezenas, que pode ser o 1, 2, 3 ou 4, haverá 8 modos de se escolher o algarismo das centenas e 8 modos de escolher o último algarismo, já que o último algarismo pode ser qualquer um dos 8 algarismos que ainda não foram utilizados, tendo, assim, $4 \times 8 \times 8 = 256$ possibilidades. No segundo caso, haverá 9 modos de se escolher o algarismo das centenas e 8 modos de escolher o último algarismo, tendo, assim, $1 \times 9 \times 8 = 72$ possibilidades. Portanto há $256 + 72 = 328$ possibilidades.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na casa das centenas do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o algarismo das dezenas (que pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4), 9 modos de escolher o algarismo das centenas (não podemos repetir o algarismo usado na última casa – note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira casa) e 8 modos de escolher o último algarismo. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o algarismo das centenas (tem que ser 0), 4 modos de escolher o algarismo das dezenas (só pode ser 1, 2, 3 ou 4 – lembre-se de que os algarismos são distintos) e 8 modos de escolher o último algarismo (não podemos repetir os algarismos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

Assim, a resposta é $360 - 32 = 328$.

Exemplo 4: De quantos modos diferentes 5 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução: Este é um problema clássico de contagem, chamado de problema das permutações simples, que é facilmente resolvido pelo Princípio Multiplicativo. De fato, basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 5 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 4 pessoas restantes, o terceiro qualquer uma das 3 pessoas restantes, e assim por diante. Logo, o número total de possibilidades é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

De um modo geral, o número de modos de ordenar n objetos é igual a $n \times (n-1) \times \cdot \cdot \cdot \times 1$, que é representado por n! (lê-se: n fatorial).

Exemplo 5: De quantos modos pode-se escolher três estudantes para serem representantes de sala de uma classe que contêm 20 alunos?

Solução: Este é um outro problema clássico de contagem, chamado de problema das combinações simples. À primeira vista, parece ser simples resolvê-lo pelo Princípio Multiplicativo: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 20 modos, o segundo, de 19 e o terceiro, de 18. Logo, o número total de possibilidades parece ser $20 \times 19 \times 18 = 6840$. Esta solução está incorreta, mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os estudantes A, B e C. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes. Logo, o número correto de comissões é igual a $6840 \div 6 = 1140$.

De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por C_n^p (lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1}$$

3. Problemas

Problema 1. Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

(OBMEP 2006, Nível 1, Fase 1, Questão 7)

Problema 2. Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

(OBMEP 2007, Nível 1, Fase 1, Questão 19)

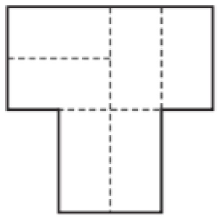
Problema 3. Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

(OBMEP 2008, Nível 1, Fase 1, Questão 18)

Problema 4. O jogo de dominó tem 28 peças diferentes. As peças são retangulares e cada uma é dividida em dois quadrados; em cada quadrado aparecem de 0 a 6 bolinhas. Em quantas peças o número total de bolinhas é ímpar?

(OBMEP 2009, Nível 1, Fase 1, Questão 8)

Problema 5. A figura mostra um polígono em forma de T e uma maneira de dividi-lo em retângulos de lados 1 cm e 2 cm. De quantas maneiras distintas, incluindo a da figura, é possível fazer divisões desse tipo?



(OBMEP 2009, Nível 1, Fase 1, Questão 15)

Problema 6. Um número natural é chamado número circunflexo quando:

• ele tem cinco algarismos;
• seus três primeiros algarismos a partir da esquerda estão em ordem crescente;
• seus três últimos algarismos estão em ordem decrescente.

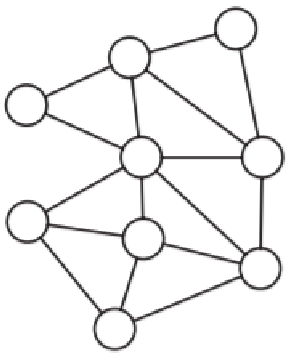
Por exemplo, 13864 e 78952 são números circunflexos, mas 78851 e 79421 não o são. Quantos são os números circunflexos maiores do que 77777?

(OBMEP 2010, Nível 1, Fase 1, Questão 18)

Problema 7. Gabriel comprou uma rosa, um cravo e um lírio e quer dar uma flor para cada uma de suas três amigas. Ele sabe que uma amiga não gosta de cravos, outra não gosta de lírios e a terceira não gosta de rosas. De quantas maneiras ele pode distribuir as flores de modo a agradar às três amigas?

(OBMEP 2011, Nível 1, Fase 1, Questão 3)

Problema 8. De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

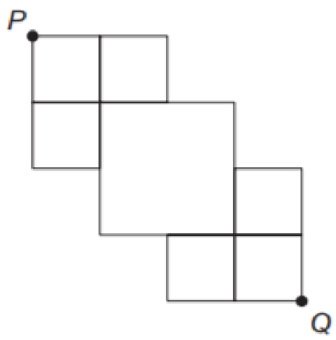


(OBMEP 2012, Nível 1, Fase 1, Questão 13)

Problema 9. Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

(OBMEP 2013, Nível 1, Fase 1, Questão 13)

Problema 10. Uma formiguinha caminha pelos lados dos quadrados da figura, sempre para baixo (↓) ou para a direita (→). Quantos são os caminhos diferentes que ela pode percorrer para ir do ponto P ao ponto Q?



(OBMEP 2016, Nível 1, Fase 1, Questão 3)

4. Referências

- Métodos de Contagem e Probabilidade, Paulo Cezar Pinto Carvalho. Apostila 2 do Programa de Iniciação Científica Júnior da OBMEP.
- Provas da primeira fase da OBMEP dos anos de 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 e 2016.