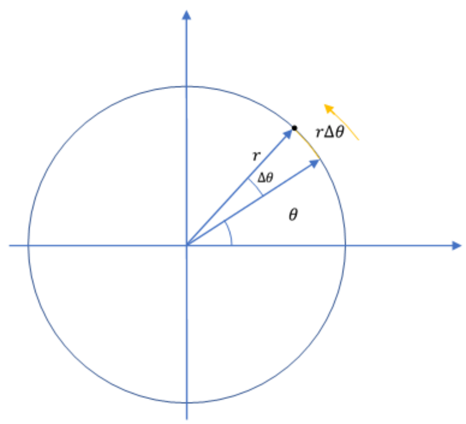
Movimento Circular

Aron Maciel

1 Rotação

Já sabemos como as leis e definições da Física funcionam no movimento retilíneo, agora, vamos investigar situações em que temos objetos rotacionando em torno de eixos fixos (ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço).

O movimento de Rotação está em todo lugar. A terra gira em torno de seu eixo, rodas, motores, hélices ou um esquiador fazendo piruetas no gelo, tudo gira e com isso conseguimos entender muitos efeitos físicos.



Primeiramente, precisamos de algumas definições:
- **Vetor posição** $\vec{r}$ é um vetor que localiza a partícula em questão, cujo módulo é a distancia ao eixo ou raio de rotação.
- **Angulo de rotação ou deslocamento angular** $\Delta\theta$ é o angulo "varrido" pelo vetor posição durante a rotação. É definido como a razão entre o comprimento do arco percorrido sobre o raio da circunferência. Assim $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad = 1\ rev$.
- **Velocidade angular ω ou $\dot{\theta}$** é a taxa de variação do deslocamento angular no tempo ou em termos matemáticos $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ que para o $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ corresponde à velocidade angular instantânea. Essa velocidade angular, resulta numa velocidade tangencial $v_\theta = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$
- **Aceleração angular α ou $\ddot{\theta}$** é a taxa de variação da velocidade angular no tempo ou em termos matemáticos $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ que para o $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ corresponde à aceleração angular instantânea. Essa aceleração angular, resulta numa aceleração tangencial $a_\theta = \frac{\Delta V_\theta}{\Delta t} = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\alpha$

Consideraremos aqui somente exemplos de objetos cuja distancia radial r ao centro de rotação é constante, ou seja, não precisamos nos preocupar com velocidades, ou acelerações radiais, ou seja $\dot{r} = 0$ $\ddot{r} = 0$. Veremos alguns casos especiais a seguir.

2 Movimento Circular Uniforme

Esse caso é o mais simples. Nele, temos que a velocidade angular é constante (porque $\alpha = 0$). Então, temos:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \therefore \Delta\theta = \omega\Delta t \therefore \theta(\mathbf{t}) = \theta_{\mathbf{0}} + \omega\mathbf{t}$$

onde θ_0 é a posição angular inicial da partícula.

Outras definições importantes que aparecem no M.C.U são os conceitos de período e frequência:
- **Período** é o tempo necessário para o objeto realizar uma revolução completa: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$
-**Frequência** é a quantidade de revoluções que o objeto consegue imprimir por unidade de tempo, e é definida como: $f = \frac{1}{T} \therefore f = \frac{\omega}{2\pi}$

Exemplo 1 A segunda lei de Kepler é a chamada Lei das Áreas, que diz que o raio de translação da terra em torno do sol "varre" áreas iguais em tempos iguais, em outras palavras, a terra tem uma velocidade areolar ($v_a = \frac{\Delta A}{\Delta t}$) constante. Calcule a velocidade areolar da terra em torno do sol, sabendo que a a distancia terra-sol é 150 milhões de km e a área de um arco de circunferência $\Delta A = R^2\frac{\Delta\theta}{2}$:
- Usando a equação do arco de circunferência e a dividindo a expressão por Δt:

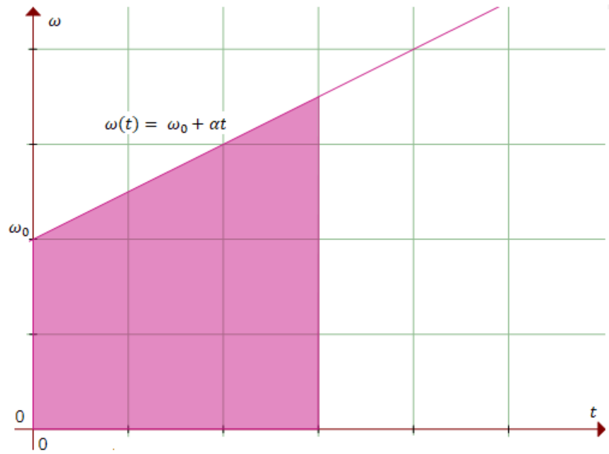
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = R^2\frac{\Delta\theta}{2\Delta t}\ ;\ \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \therefore \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{\pi(1,5*10^8 m)^2}{365*24*60*60s} = 2241\ km^2/s$$

3 Movimento Circular Uniformemente Variado

Agora, vamos estudar o caso em que temos aceleração constante ($\alpha = cte$), daí:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \therefore \Delta\omega = \omega\Delta t \therefore \omega(\mathbf{t}) = \omega_{\mathbf{0}} + \alpha\mathbf{t}$$

onde ω_0 é a velocidade angular inicial da partícula. Aqui, usaremos um recurso matemático para acharmos o deslocamento angular: iremos calcular a área abaixo de um gráfico $\omega\ por\ t$. de t=0 até um instante qualquer.



$$\Delta\theta = \frac{(\omega_0+\omega)t}{2} = \frac{(2\omega_0+\alpha t)t}{2} \therefore \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Podemos também achar uma relação entre ω e θ

$$t = \frac{\omega-\omega_0}{\alpha} \therefore \theta(t) = \theta_0 + \omega_0\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2 \therefore$$

$$2\alpha\Delta\theta = 2\omega\omega_0 - 2\omega_0^2 + (\omega-\omega_0)^2 \therefore \omega^2(\theta) = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

Exemplo 2: Se num futuro distante conseguimos a tecnologia necessária para "acelerar" a rotação da terra em torno do sol de forma a diminuirmos o ano terrestre para 300 dias (supondo que a distancia terra-sol não se altera). qual a aceleração angular necessária para fazer isso em um quarto de volta em torno do sol - Utilizando a equação da velocidade angular em função do deslocamento, e a definição de período:

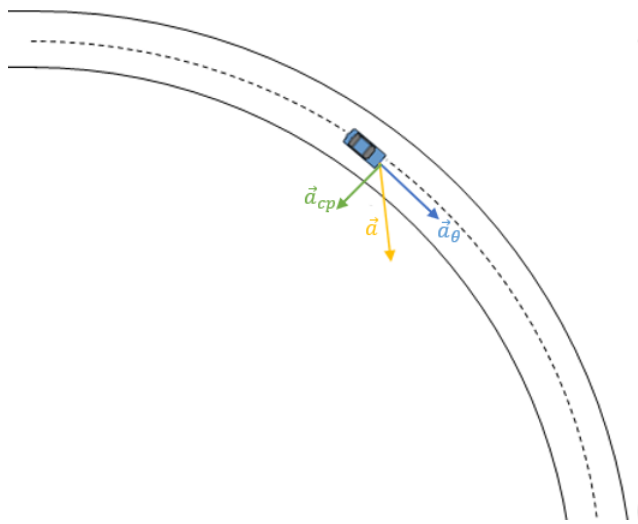
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \therefore \left(\frac{2\pi}{300dias}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{365dias}\right)^2 + 2\alpha\frac{\pi}{4} \therefore \alpha = 9,06*10^{-5} rad/dias^2$$

OBSERVAÇÃO: Não confundir aceleração *angular* α com aceleração *centrípeta* a_{cp}. Ambas ocorrem em rotações, porém aceleração centrípeta é radial e aponta para o eixo de rotação, enquanto a aceleração angular gera uma componente tangencial da aceleração.

$$\vec{a}_{cp} = -\omega^2\vec{r} \qquad \vec{a}_\theta = \alpha r\hat{\theta}$$

Em outras palavras a aceleração centrípeta decorre da resultante das forças que atuam na direção radial e ela é necessária para que qualquer rotação ocorra, até mesmo uma realizada sob movimento circular uniforme, enquanto a segunda só ocorre quando há uma forças na direção tangencial durante a rotação.

Exemplo 3: Para fazer uma curva, um carro deve rodar as rodas dianteiras de forma a mudar a direção da aceleração, supondo que em certo ponto da curva (que tem raio R), o carro possui uma aceleração angular α e uma velocidade angular ω. determine o vetor aceleração do carro nesse instante e mostre que a direção pra onde o vetor aceleração aponta, não depende do raio da curva.



- Para determinarmos o vetor aceleração, só precisamos pensar que a aceleração total é uma soma das acelerações radial (na direção $\hat{r}$) e tangencial (na direção $\hat{\theta}$) assim:

$$\vec{a} = (a_{cp})\hat{r} + (a_\theta)\hat{\theta} = (-\omega^2 R)\hat{r} + (\alpha R)\hat{\theta}$$

Podemos achar também a direção $\hat{a}$ para onde o vetor aceleração aponta, sabendo que $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$, onde $a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha R)^2}$

$$\hat{a} = \frac{-\omega^2 R\hat{r} + \alpha R\hat{\theta}}{\sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha R)^2}} \therefore \hat{a} = \frac{-\omega^2 \hat{r} + \alpha\hat{\theta}}{\sqrt{(\omega^2)^2 + (\alpha)^2}}$$

4 Conclusão

Podemos fazer um paralelo interessante entre cinemática linear e a rotacional, porque não importa qual o tipo de movimento que algum objeto faz, as leis da física serão as mesmas.

Radial	Rotacional
$x(t)\ ,\ x_0$	$\theta(t)\ ,\ \theta_0$
$v(t)\ ,\ v_0$	$\omega(t)\ ,\ \omega_0$
$x(t) = x_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \omega t$
$a(t)$	$\alpha(t)$
$v(t) = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$v^2(x) = v^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2(\theta) = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Entre outros paralelos possíveis paralelos estão, Força e Torque, Momento linear e Momento angular, Massa e Momento de Inércia. porem explica-los fugiria do proposto nesse material.