

Dinâmica

Artur Rodrigues



1 Tipos de Forças

Após entendido o funcionamento de aplicação de forças em corpos, vamos estudar que tipos de forças existem e como elas atuam (Suas dependências com distância, velocidade, entre outros). Após a análise de cada força, abordaremos um exemplo para cada um.

- Força Normal: A força normal é a força que surge devido o contato entre um corpo e uma superfície, da mesma forma que o atrito, porém, diferentemente da força de atrito, esta só serve para igualar qualquer força aplicada à superfície no eixo paralelo à esta.
- Força Peso: A força peso, para problemas que envolvam aproximações de distâncias não-astronômicas (Que será as que trabalharemos), a força peso será da forma $F = mg$ onde g é a aceleração da gravidade. Ou seja, é uma

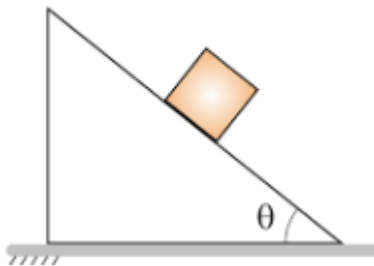
força constante. Veja que a força peso é em relação aos centros de massa de cada corpo (Ou seja, ela é aplicada no centro geométrico da figura, seu baricentro). Para corpos simétricos e homogêneos, o centro geométrico da figura é o encontro das retas (ou planos) de simetrias.

Ex: Considere o sistema composto pela Terra e por um bloco de massa M em sua superfície. Qual a reação da força peso que o bloco de massa M sofre? Onde ela é aplicada?

Resposta: A reação da força peso do corpo de massa M é uma força peso de mesma intensidade no centro de massa da Terra. **Não** é a força normal.

- Força de Contato: A força de contato é a resultante entre a força de atrito e a força Normal. Ao analisar o número de forças em um corpo, precisamos analisar a Força de Contato somente como uma força, ou seja, a força de atrito e a normal são **componentes** de uma só força.

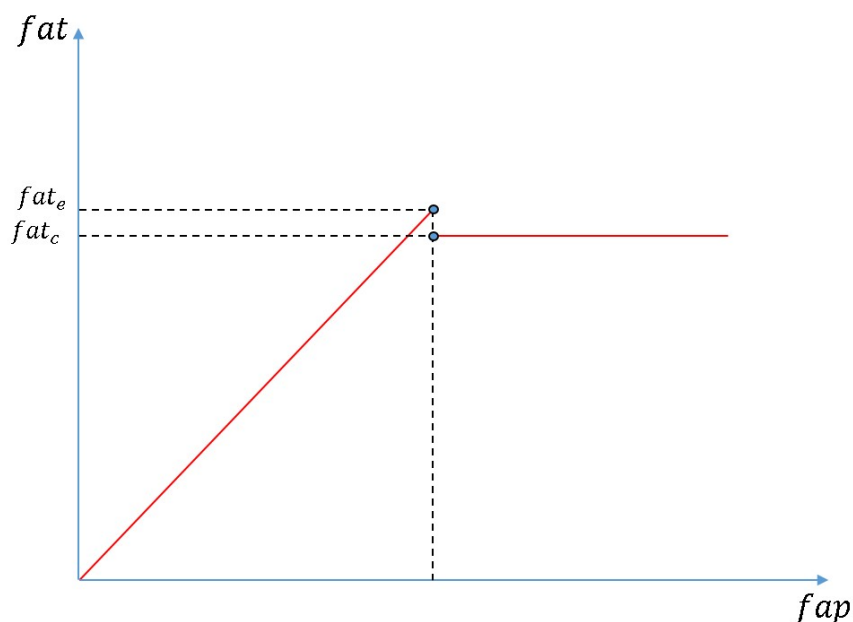
Exemplo: Quantas forças atuam no corpo da foto?



Resposta: Para tal sistema, existem somente duas forças atuando no corpo. A força de contato e a força peso.

- Força de Atrito: A força de atrito, força mais comum entre as abordadas neste capítulo em nosso dia a dia, tem um funcionamento curioso. É uma força puramente elétrica, pois sua origem vem de interações entre as cargas de corpos próximos uns dos outros, o que gera os problemas. Como analisado no problema do primeiro material, iremos definir dois tipos de atrito : Cinético e estático. Como os nomes sugerem, um deles atua em corpos estáticos e outro em corpos em movimento. O atrito estático tem um mecanismo simples, as interações prendem o corpo no local em que ele se encontrava, igualando a força aplicada a este. Observamos isso quando tentamos mover algo muito pesado e não conseguimos.

O atrito cinético é um sistema mais simples. Quando o corpo começa a se mover, a força de atrito passa a se tornar constante. O seguinte gráfico demonstra o comportamento da força:



Para resoluções de questões, em geral, se define dois valores de coeficientes de atrito (O valor que relaciona a força de contato com a força de atrito): O coeficiente de atrito cinético e o coeficiente de atrito estático. No gráfico, o coeficiente de atrito cinético é a relação dessas forças quando o corpo está se movendo (É o valor constante que aparece no gráfico) e o coeficiente de atrito estático (O pico do gráfico). Em geral, podemos analisar a função da forma:

$$F_{at} \geq \mu N \quad (1)$$

Exemplo: Considere um paralelepípedo de áreas A_1 , A_2 e A_3 . Para qual dessas três áreas a força de atrito será maior? Para a situação em que o paralelepípedo está em um plano inclinado, se este possui massa m , qual é o valor do ângulo de inclinação que gera o coeficiente de atrito máximo?

Resposta: As três situações geram as mesmas forças de atrito, pois estas não dependem da área de contato. Para o sistema em equilíbrio, temos que:

$$Mg \sin \theta = F_{at}$$

$$Mg \cos \theta = N$$

$$F_{at} = \mu N$$

Resolvendo o sistema de equações, temos que

$$\mu = \tan \theta$$

- Resultante Centrípeta: A resultante centrípeta, na realidade, não é um tipo de força, pois esta não se classifica como uma força, somente uma expressão que pode vir a definir uma força qualquer. A definição formal da resultante centrípeta é que, para um sistema que está em movimento, existirá sempre um centro instantâneo de rotação para tal movimento, de tal forma que a força que é aplicada no corpo pode ser escrita na forma:

$$F = \frac{M(V)^2}{R} \quad (2)$$

A interpretação física dessa expressão é magnífica! Imagine você, realizando qualquer movimento que seja. Em todos esses movimentos, existirão raios instantâneos de curvatura característicos de seu movimento. Talvez você estranhe um pouco isso para um movimento retilíneo. Que tipo de raio seria cabível para um movimento retilíneo? Bom, o consenso geral é que, para arcos de circunferências, existem duas condições que fazem estes arcos se aproximarem de retas: Ou o arco corresponde a um ângulo muito pequeno, ou o raio da circunferência é muito grande. Desta forma, nota-se que para um movimento retilíneo, o raio de curvatura tende ao infinito! Conclusão não muito óbvia, mas muito interessante de se pensar.

Exemplo 1: Um carro de corrida da fórmula 1 está fazendo uma curva de raio 0.1 km . Considerando que a massa deste carro é 750 kg e que a velocidade deste é de 180 km/h . Calcule a resultante centrípeta. Se considerarmos um modelo em que a resultante centrípeta exista devido à força de atrito, da forma $\propto N$, sendo $\propto = 0.7$. Com essas considerações, qual será a real velocidade do corpo para que exista consistência com o modelo? Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$

Resposta: Transformando as grandezas para o SI, temos que:

$$V = 50 \text{ m/s} \text{ e } R = 100 \text{ m}$$

Dai, podemos analisar diretamente a força centrípeta com a fórmula:

$$F = \frac{mv^2}{R} = 18,750N$$

Na situação 2, temos:

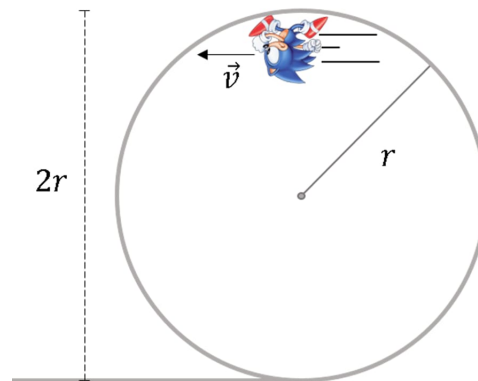
$N = mg$ logo, tem-se que:

$$\ni mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\ni gR} = 26,5m/s$$

Veja que nosso modelo não traz a tona a velocidade proposta no início da questão.

Exemplo 2: O Sonic está fugindo de Robotnik, e, para tal, ele vira uma esfera e sai em disparada. No caminho, ele encontra um loop circular de raio R . Para qual energia cinética inicial ele conseguirá realizar o loop?



Resposta: Usando o conceito de conservação de energia abordado no material de energia, temos que:

$$E_i = E_f$$

$$\rightarrow E_i = mg2R + \frac{m(v_f)^2}{2}$$

Onde, utilizando o conceito de resultante centrípeta:

$Mg + N = \frac{m(v_f)^2}{R}$ Para que a velocidade final seja mínima, temos que a força normal tem que tender a 0, ou seja.

$$\frac{mgR}{2} = \frac{m(v_f)^2}{2}$$

Substituindo, temos:

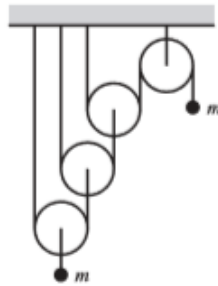
$$\frac{mv^2}{2} = mg2R + \frac{mgR}{2} \rightarrow E_i = \frac{5mgR}{2}$$

- Força de Tração: Força de tração é uma força intrínseca a corpos não esticáveis. A tendência de uma força de tração é ser resistente ao movimento de compressão ou estiramento do corpo. Essa força é mais visível em cordas e em barras rígidas. Seu comportamento várias de tal forma que ela atue mantendo o corpo com o mesmo comprimento, independente do seu valor. Como é um conceito um pouco mais abstrato que os outros abordados até então, irei colocar alguns exemplos com valores diferentes de trações para situações similares. Acredito que basta dois exemplos para determinar esse funcionamento. Essas considerações geram vínculos muito úteis nos sistemas de Atwood. Traremos um exemplo de uma máquina de Atwood e de uma barra rígida.

Exemplo 1: Considere uma barra rígida de tamanho L . Você empurra uma das pontas da barra contra a parede com uma força F . Qual a força que a outra ponta da barra sente da parede?

Solução: Como imaginamos, ao empurrar uma barra por um extremo, esta, por ser rígida, deve possuir força resultante no seu eixo igual a 0. Sendo assim, a outra força atuante nesta é a força da parede. Para tal, a força que ela sofre pela parede deve ser 0.

Exemplo 2:



Para a máquina de Atwood da imagem acima, calcule a aceleração de cada uma das esferas.

Resposta: Para esse sistema, teremos que analisar dois principais efeitos: O de ter uma das cordas coladas a uma parede e de umas das massas estarem ligadas ao centro da polia. A corda estar ligada na parede altera o vínculo entre as acelerações de cada ponto da polia. Podemos analisar que a aceleração o centro da polia é igual a média das acelerações das pontas. Definindo

como a_1 a aceleração da massa inferior e a_8 como a aceleração da massa superior, temos:

$$a_1 = \frac{a_8}{8}$$

O outro vínculo necessário é os das trações. Como a tração em uma mesma corda tem que ser a mesma, a tração do centro da polia sempre tem que ser o dobro da tração da corda que a envolve para que a força resultante desta seja 0. Note que esses vínculos são feitos para polias ideais, assumindo massa nula. Essas relações são possíveis pois não pode existir força resultante em um corpo sem massa, se não assumiríamos aceleração infinita. Dai, teríamos tais expressões:

$$mg - T = ma_1$$

$$mg - \frac{T}{4} = ma_8$$

$$a_1 = \frac{a_8}{8}$$

Dai, temos que:

$$a_8 = \frac{24}{31}g$$

$$a_1 = \frac{3}{31}g$$

- Força Elástica: Ao se estudar dinâmica, nos deparamos constantemente com molas em problemas. O motivo disto é a forma como a força da mola se comporta, que possui várias características interessantes para estudos de movimentos. A força elástica é da forma $F = -kx$, ou seja, ela é contrária ao deslocamento do corpo e é dependente do aumento do tamanho da mola. k é a constante elástica da mola, medida achada experimentalmente.

Exemplo: Descreva um experimento em que é possível encontrar a força elástica de uma mola.

Resposta: Um experimento muito famoso para a análise de um sistema massa-mola é estudar a deformação da mola. Colocando massas padronizadas em um prendedor acoplado à mola, podemos medir a deformação da mola. Como conhecemos a massa padronizada, podemos analisar que $F = kx$, ou seja, temos a força e a deformação da mola. Da equação, tiramos o valor da constante elástica.

- Força de Arrasto: Uma das formas da força de arrasto é $F = -bv$, ou seja, é uma força dependente da velocidade do constante b é chamada coeficiente de arrasto e depende do material em que o corpo se move e do formato

do corpo que está se movendo. Por ser uma força com uma dependência complicada de se lidar, pois envolve muitas resoluções com cálculo, esse tipo de força é pouco abordado, porém é sempre útil conhecer como as coisas funcionam. Outra forma da força é $F = -b(v)^2$, que torna o sistema de equações ainda pior de se resolver. Essa segunda forma é ainda menos comum de se analisar.

- Força de atração gravitacional: Para efeitos de complemento, irei definir aqui a força gravitacional. Esta se da na forma $F = \frac{-GMm}{(r)^2} \hat{r}$ Ou seja, se você definir um vetor raio ligando dois corpos, sendo seu início em B e o seu final em A, a força de atração gravitacional de B em A aponta para B (No sentido contrário ao vetor definido). Para abordagens mais completas, olhar o material de gravitação do site.

Após todos esses exemplos, irei trazer um apêndice um problema mais desafiador. Se divirta!

Apêndice

- Exemplo 1: Uma haste rígida com duas esferas de massa M está na vertical. Devido a uma pequena força na esfera superior, a haste se desequilibra, porém, sem velocidade inicial. Qual a expressão analítica que determina o ângulo da barra com a horizontal para que a tração seja nula?

Solução: Para tal problema, teremos 3 principais incógnitas: A velocidade no eixo x de cada partícula, que, por simetria, será igual e de sentidos opostos; a velocidade no eixo y da partícula de cima e; o ângulo que a barra faz com a horizontal. Para tal, então, precisaremos de 3 equações. i) Conservação de Energia: Como não existem forças dissipativas, podemos conservar a energia do sistema. Sendo assim, definindo como o tamanho da barra sendo L, temos que:

$$MgL = MgL \sin \theta + \frac{m(v_y)^2}{2} + m(v_x)^2 \quad (1)$$

ii) Mudança de Referencial: A movimentação do sistema no referencial da terra pode vir a ser um pouco complexa, dependendo do sistema, e neste encontramos um assim. Para a simplificação desse sistema, podemos mudar o referencial para o da esfera que está em contato com o chão. Desta forma, o que vamos observar? Bem, desta maneira, a velocidade no eixo x da esfera inferior será atribuída à esfera superior, assim como a componente da força

de tração, porém queremos analisar o sistema quando a tração for igual a 0, ou seja, nosso sistema será simplificado para uma esfera fazendo um movimento circular em torno de um ponto! Neste referencial, teremos 2 conclusões:

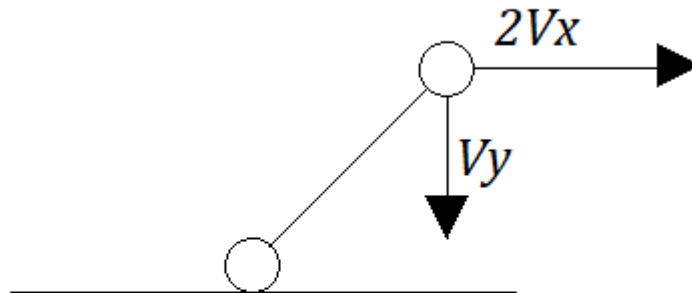


Figure 1: Caption

a) Como a barra é homogênea, ela não poderá ser comprimida. Sendo assim, podemos analisar que:

$$2v_x \cos \theta = v_y \sin \theta \quad (2)$$

b) Neste referencial, podemos utilizar a resultante centrípeta com mais simplicidade. Ou seja, teremos que:

$$\frac{M(2v_x \sin \theta + v_y \cos \theta)^2}{L} = MgL \sin \theta \quad (3)$$

Com estas 3 expressões, podemos achar a expressão analítica para o ângulo. Substituindo v_x de (2) em (1) e (3), temos:

$$MgL(1 - \sin \theta) = \frac{m(v_y)^2(\sec 2\theta + 1)}{4} \quad (4)$$

$$\frac{v_y^2}{(L \cos^2 \theta)} = g \sin \theta \quad (5)$$

Substituindo v_y de 5 em 4, temos:

$$1 - \sin \theta = \frac{\sin \theta \cos^2 \theta (1 + \sec 2\theta)}{4}$$

$$4 - 4 \sin \theta = \sin \theta (\cos 2\theta + 1)$$

$$4 - 4 \sin \theta = \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta$$

$$\sin^3 \theta - 6 \sin \theta + 4 = 0$$

Sendo esta a última expressão analítica pedida no enunciado. Poderíamos parar por aqui, porém existe algumas curiosidades sobre como resolver equações deste tipo. Caso exista alguma solução possível, ela terá que ser algum valor das possíveis permutações das divisões dos divisores do termo independente pelos divisores do termo que acompanha a variável com maior potência. Sendo assim, as possíveis raízes reais serão 1, 2 ou 4. Salta aos olhos que $\sin \theta = 2$ é solução da equação. Essa última afirmação soa estranha, já que o seno não pode chegar até o valor 2, porém não é esta a raiz que estamos atrás. Dividindo o polinômio $x^3 - 6x + 4$ por $x - 2$, teremos o seguinte polinômio:

$$x^2 + 2x - 2$$

Para tal polinômio, teremos as raízes: $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ e $x_3 = 1 - \sqrt{3}$. Destas 3 raízes da equação, somente 1 está no intervalo entre 0 e 1. Ou seja, esta raiz será o valor do ângulo desejado. Sendo assim, temos:

$$\sin \theta = \sqrt{3} - 1$$

Trabalho algébrico muito grande, de fato, porém nunca se sabe quando será necessário enfrentar equações assim sem que você tenha uma calculadora em mãos.

Com essas armas em mãos, traremos uma lista de questões com aplicações de todas as ideias apresentadas aqui.