Cálculo

Artur Rodrigues

Como definido no ultimo material, podemos considerar a derivada como a seguinte expressão:

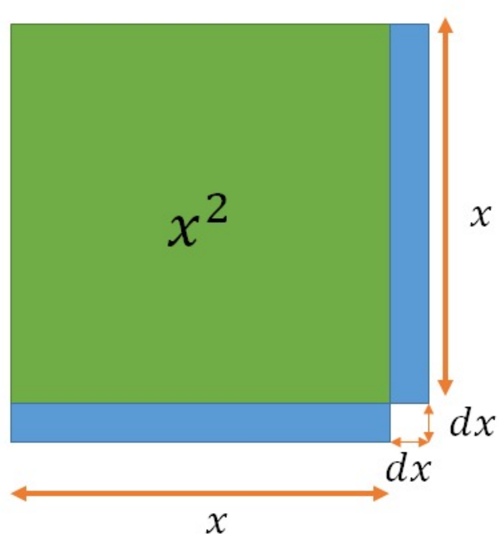
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Essa é a definição formal de derivada e usando-a você poderá demonstrar todas (ou quase todas) as derivadas possíveis, porém, para nível de olimpíadas científicas, você irá precisar saber somente algumas, como a derivada da função polinomial e a trigonométrica. Irei mostrar, também, uma interpretação geométrica da derivada polinomial e um truque mnemônico para decorar as derivadas trigonométricas.

- Derivada da soma: Caso você tenha uma soma de funções, a derivada da soma dessas funções será a soma das derivadas. O mesmo vale para a subtração. Ou seja:
  $$\frac{f(x)+g(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

- Derivada polinomial: Considere a função $f(x) = x^n$ desta forma, substituindo na definição formal, teremos:
  $\frac{df(x)}{dx} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$
  Para cálculos de derivadas, iremos, no geral, considerar que termos que possuem uma potência de Δx maior que 0 será um termo desprezível para o valor da derivada. Utilizando as considerações do triângulo de Pascal, na expansão do termo $(x+\Delta x)^n$ será $x^n + nx^(n-1)\Delta x + ...$ Veja que, na expressão total, estamos dividindo o numerador por Δx, ou seja, os termos que possuem dependência quadrática irão manter uma dependência de Δx, isto é, quando formos aplicar o limite, estes termos irão se tornar desprezíveis. Substituindo a expansão, teremos:
  $\frac{df(x)}{dx} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}}{\Delta} x\Delta x$
  $\frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1}$
  Concluímos que, quando você possui uma função polinomial, basta você multiplicar pela potência atual da função e subtrai 1 da potência.

  A interpretação geométrica desta é a seguinte. Consideremos um quadrado com ambos os lados valendo x. Caso você expanda os lados de um valor dx, teremos a seguinte configuração:



  Veja que, se considerarmos a função $A(x) = x^2$, ou seja, a área do quadrado, podemos computar o aumento da área da seguinte forma:

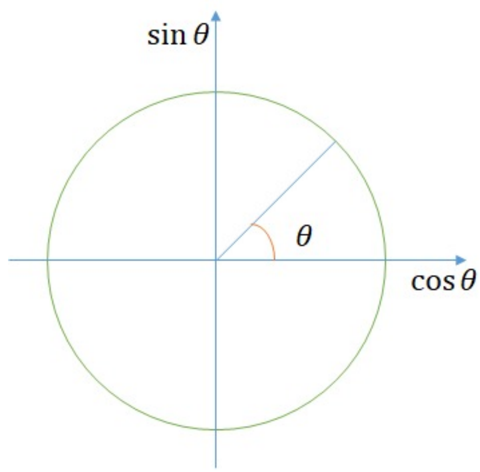
$dA = xdx + xdx + (dx)^2$ →dA = 2xdx + (dx)^2

Agora, aqui, teremos que fazer outra consideração de aproximação. Como estamos analisando uma variação diferencial de área, então só iremos poder considerar as variáveis Δx que estejam elevadas à primeira potência, ou seja, iremos fazer uma aproximação de primeira ordem. Sendo assim teremos a seguinte expressão:

$dA = 2xdx$

Como a função é $A(x) = x^2$, temos demonstrado a derivada da função x^2. E é obvio que podemos concluir coisas similares com um cubo e aumentando cada lado dele um tamanho dx, e nisso encontraremos que $d(x^3) = 3x^2dx$. E assim, vemos o mesmo padrão que encontramos na demonstração formal.

- Derivada trigonométrica: A demonstração da derivada trigonométrica não é algo necessário para o nosso curso, então, irei mostrar somente um truque para decorá-las. Observe a seguinte imagem:



Para analisar a derivada trigonométrica, basta percorrer o circulo trigonométrico no sentido horário. Ou seja:

$d(senx) = cosxdx$

$d(cosx) = -senxdx$

$d(-senx) - -cosxdx$

$d(-cosx) = senxdx$

- Regra da cadeia: A ideia da regra da cadeia é o trabalho com função compostas. A ideia é que, ao visualizar uma função, existirão funções "mais internas" do que outras. Um exemplo para visualização seria a derivada da função $f(t) = sen(\omega t)$, uma função muito comum no estudo do movimento harmônico simples. Veja que, ao derivar a função em função do tempo, precisamos, primeiramente, derivar o argumento do seno (Ou seja, o ângulo), pois é a função mais interna. O que isso quer dizer, formalmente? Veja, no formato geral, que para uma função $f(u(x))$ teremos:

  $\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$

  $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(sen(\omega t))}{dt}$ →df$\frac{}{dt=\frac{dsen(u)}{du}\times\frac{du}{dt}}$

  Onde $u = \omega t$. Concluímos que:

  $\frac{df}{dt} = \omega cos(\omega t)$

Com essas regras você saberá o suficiente para realizar qualquer prova de olimpíadas, caso seja necessário o conhecimento de cálculo (Pelo menos do conceito de derivada). Como uma breve revisão do conceito teórico por trás de todo esse algebrismo, lembre-se sempre que o cálculo da derivada determina o ângulo que a reta tangente faz com a horizontal. O dimensional da medida da derivada, ao se retirar de um gráfico, será a divisão dos dimensionais do eixo y pelo eixo x.

Absorvam esses conceitos teóricos e estudem os conceitos algébricos. A ideia de cálculo (Pelo menos o básico) é para funcionar como algo levemente intuitivo: quanto mais você se imerge nos conceitos, mais eles soarão naturais para ti. Bons estudos!

Questões

- Questão 1: Derive a função:

  a) $x^3 + 5x^2 + x + 7$

  b) $cos(5x+3) + x^3 - x$

  c) $senxcosx$

- Questão 2: Considere que a posição de uma partícula é dada pela seguinte função: $x(t) = 5 + 2t + 3t^2 + 8t^3$. Considere que $t_o = 0$ Mostre quais são as funções de velocidade e aceleração desta partícula. Tem algum ponto em que a aceleração é 0? Considere que tempo negativo caracteriza uma situação impossível.

Gabarito

- Questão 1:

  a) $3x^2 + 10x + 1$

  b) $-5cos(5x + 3) + 3x^2 - 1$

  c) $cos(2x)$

- Questão 2:

  $v(t) = 2 + 6t + 24t^2$ e $a(t) = 6 + 48t$

  Não, não existe tempo para que a aceleração seja nula