NÍVEL I
Ensino Fundamental
8º e 9º anos

SOLUCIONÁRIO

SIMULADO III – AMPULHETA DO SABER

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA – 2018

2ª FASE

PARTE I – QUESTÕES DE RESPOSTA DIRETA

Questão 1

$i)$ Por conservação de energia nos estágios inicial (“mushroom” sobre a plataforma H) e final (“mushroom” no instante que alcança a plataforma h), temos:

$$mgH + \frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{mv'^2}{2} \rightarrow 2g(H-h) + v^2 = v'^2$$

$ii)$ Sabendo que v é a mínima possível para que o “mushroom” realize a trajetória, isto é, alcance a borda esquerda da plataforma h, podemos inferir que, na horizontal:

$$x = v.t \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

Já na vertical:

$$(H-h) = \frac{gt^2}{2} \rightarrow (H-h) = \frac{g \cdot \frac{x^2}{v^2}}{2} \rightarrow \frac{gx^2}{2\,(H-h)} = v^2$$

Relacionando i e ii ,

$$v'^2 = \frac{gx^2}{2\,(H-h)} + 2g(H-h)$$

$iii)$ Sabendo que a força de atrito é a única responsável por cessar o movimento do corpo na segunda plataforma, podemos escrever que:

$$v'^2 - 2g\mu d = v_f^2 = 0 \rightarrow v'^2 = 2g\mu d$$

Resgatando o resultado ii,

$$2g\mu d = \frac{gx^2}{2\,(H-h)} + 2g(H-h) \rightarrow \boxed{d = \frac{x^2}{4\mu\,(H-h)} + \frac{(H-h)}{\mu}}$$

Questão 2

$i)$ Primeiramente, já que o elevador está em ascensão, devemos determinar sua aceleração resultante. Para tanto, precisamos considerar o elevador como um corpo de massa 700 kg (sistema homem + elevador). Assim:

$$F_{Res} = M_T.a \rightarrow a = \frac{F_{Res}}{M_T} = \frac{1000\ N}{700\ kg} \therefore a = \frac{10}{7}\ m/s^2$$

$ii)$ Feito isso, devemos olhar para dentro do elevador, onde o homem sente a aceleração no **sentido contrário** ao aplicado ao sistema, nesse caso, o mesmo do da aceleração gravitacional. Podemos, então, calcular a normal sentida dentro do elevador:

$$N = m.(g+a) = 70.10 + 70.\frac{10}{7} = 800\ N \rightarrow \boxed{N = 800\ N}$$

Questão 3

$i)$ É importante salientar que sendo h a altura de um ponto dentro do líquido em relação ao chão, temos:

$$p = p_o + \rho g(H-h)$$

Onde p_o é a pressão atmosférica e ρ a densidade da água.

$ii)$ O alcance de um jato de água que sai a partir da altura h é tal que:

$$A = v_o.t$$

Mas, sabemos que:

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Portanto,

$$A = v_o.\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$iii)$ Por conservação de energia:

$$\frac{mv_o^2}{2} + mgh = mgH \rightarrow v_o = \sqrt{2g(H-h)}$$

Relacionando $ii)$ e $iii)$, temos:

$$A = \sqrt{4h(H-h)} \therefore 4h^2 - 4Hh = A^2$$

Analisando essa função quadrática em h, temos que para A máximo, a função de h atinge seu mínimo. Nesse caso, h pode ser dado pelo $x_{vértice}$:

$$x_{vértice} = \frac{-b}{2a} = \frac{4H}{8} = \frac{H}{2} \therefore \boxed{h = \frac{H}{2}}$$

Questão 4

Da primeira evacuada:

$i)\ \eta_o = \eta_1 + \Delta\eta_1$

$ii)\ \frac{PV}{RT} = \frac{P_1V}{RT} + \frac{P_1\Delta V}{RT} \rightarrow P_1 = \frac{PV}{V+\Delta V} = \frac{P}{1+\frac{\Delta V}{V}}$

Da segunda evacuada:

$i)\ \eta_o = \eta_2 + \Delta\eta_2$

$ii)\ \frac{P_1V}{RT} = \frac{P_2V}{RT} + \frac{P_2\Delta V}{RT} \rightarrow P_2 = \frac{P_1V}{V+\Delta V} = \frac{P_1}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$

Com isso, o que pretendemos é encontrar uma recorrência para a equação que rege a pressão após “n” bombeadas. Para tanto, fizemos os dois casos iniciais acima. Estes são suficientes para percebermos certo padrão no comportamento da pressão e deduzirmos sua expressão geral.

Esta forma de dedução chama-se *indução matemática.* Vamos à prova da equação:

I. Conjectura: $P_n = \frac{P}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^n}$ (parece um bom chute!) =)

II. Para provarmos, suponha que essa expressão funcione para um n (um dos nossos casos iniciais, por exemplo). Então, para n+1, $P_{n+1} = \frac{P}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{n+1}}$, mas $\eta_n = \eta_{n+1} + \Delta_{n+1} \rightarrow \frac{P_nV}{RT} = \frac{P_{n+1}V}{RT} + \frac{P_n\Delta V}{RT} \rightarrow P_{n+1} = \frac{P_n}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} \therefore P_{n+1} = \frac{P}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{n+1}}$ ■ (Como queríamos concluir).

III. Para descobrirmos o número de bombeadas, basta vermos a razão $\frac{P_n}{P} = \eta$, então: $\frac{P_n}{P} = \eta \rightarrow \frac{\frac{P}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^n}}{P} = \eta \rightarrow \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^n = \frac{1}{\eta}$ ∴

$$n \log\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) = \log\frac{1}{\eta} \rightarrow \boxed{n = \frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log 1+\frac{V}{\Delta V}}}$$

PARTE II – QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

Questão 5

a) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta s = v.\Delta t \rightarrow d = 2{,}5\frac{m}{s}.16\,s \therefore \boxed{d = 40m}$

b) Para que ocorra encontro no cruzamento, o tempo de cada carro percorrer a distância até o cruzamento deve ser igual a:

$$\frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{\Delta s_2}{v_2} \rightarrow \frac{30}{v_1} = \frac{d}{v_2} \therefore \frac{30\,m}{v_1} = \frac{40\,m}{4\,m/s} \rightarrow \boxed{v_1 = 3\,m/s}$$

Questão 6

a) $i)$ No ápice do morro (cujo formato não é relevante), existirá uma força resultante centrípeta apontando para um certo *Centro Instantâneo de Rotação*:

$$mg - N = \frac{mv^2}{R_c}$$

Onde R_c é o raio de curvatura do movimento nesse ponto.

$$10000\,N - 2000\,N = \frac{1000.\left(20\frac{m}{s}\right)^2}{R_c} \rightarrow 8\,kN.R_c = 400\,k(N.m)$$

$$\therefore R_c = 50\,m$$

$ii)$ Para o segundo carro, teremos:

$$mg - \frac{mv^2}{R_c} = N \rightarrow 10000\,N - \frac{1000\,.15^2}{50} = \boxed{N = 5500\,N}$$

b) Para esse caso, faremos $N = 0$ (condição limite):

$$mg = \frac{mv^2}{R_c} \rightarrow v^2 = 50.10 \therefore \boxed{v = 10\sqrt{5}\,m/s}$$

Questão 7

a) Analisando os eixos perpendiculares individualmente, temos que:

$i)$ Eixo y: $u_y . t = v . t \ \rightarrow \ u_y = v$

$ii)$ Eixo x: $d = u_x . t$. Para que as partículas se encontrem no ponto de altura máxima, é preciso que:

$$v_y(t) = v - gt \ \rightarrow 0 = v - gt \ \therefore t = \frac{v}{g}$$

Logo,

$$\frac{d}{t} = \boxed{u_x = \frac{gd}{v}}$$

b) $i)$ Sabemos que u é dado por:

$$u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2}$$

$ii)$ Para que u seja mínimo, precisamos usar a dica fornecida no enunciado, de tal modo que:

$$v^2 + \left(\frac{gd}{v}\right)^2 = \sqrt{v^2 \left(\frac{gd}{v}\right)^2} = gd$$

Relacionando $i)$ e $ii)$, inferimos que: $\boxed{u = 2\sqrt{gd}}$

Questão 8

$i)$ Analisando a tabela fornecida do enunciado, depreende-se que $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, uma vez que a *Energia Potencial* é diretamente proporcional à *massa do objeto* e inversamente proporcional à *distância*. Assim, a expressão correta para E_P é:

$$E_P = \frac{-G . M_T . m_{obj}}{R_T}$$

$ii)$ Na situação proposta, considerando que não há forças dissipativas no processo, podemos conservar a energia do corpo que se deseja lançar, observe:

$$E_i = E_f \ \rightarrow \ E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$$

Onde E_C representa a energia cinética em um dado momento – no caso, inicial (i) ou final (f) – e E_P, a energia potencial nas mesmas circunstâncias. Note que, após se desvencilhar do campo de influência da atração gravitacional terrestre, o objeto não mais interagirá com o planeta e, por isso, sua E_{Pf} em relação à Terra será nula. Além disso, como queremos encontrar a situação limite em que isso acontece, devemos assumir que a velocidade final do corpo também será nula, já que essa condição matemática nos dará a velocidade inicial mínima necessária para que o evento ocorra. Portanto, podemos escrever que:

$$\frac{m_{obj}.v_{mín}^2}{2} - \frac{G.M_T.m_{obj}}{R_T} = 0 \rightarrow v_{mín} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Substituindo os dados, os quais foram fornecidos na capa da prova,

$$v_{mín} = \sqrt{\frac{2.6,67.10^{-11}.6,0\,.10^{24}\,m^3.s^{-2}}{6,4\,.\,10^6\,m}} \approx \boxed{11\,km/s}$$