Ampulheta do Saber

Questões de Dinâmica e Energia com Soluções

David de Freitas

25 de julho de 2018

Sumário

1 Enunciados **VII**
1.1 A Moeda no Copo(**) VII
1.2 Usando as Polias(*) VII
1.3 Descendo pela Calha(**) VIII
1.4 Cunha como um referencial não-inercial(***) VIII
1.5 Bloco na Tábua(**) VIII
1.6 Faixa de Velocidades(**) IX
1.7 Força mínima para o movimento(*) IX
1.8 Empurrando a Rampa(**) IX
1.9 Usando os dois lados da Cunha(**) IX
1.10 Roldanas e a Barra(*) X

2 Soluções **XI**
2.1 A Moeda no Copo(**) XI
2.2 Usando as Polias(*) XI
2.3 Descendo pela Calha(**) XII
2.4 Cunha como um referencial não-inercial(***) XIII
2.5 Bloco na Tábua(**) XIII
2.6 Faixa de Velocidades(**) XIV
2.7 Força mínima para o movimento(*) XV
2.8 Empurrando a Rampa(**) XV
2.9 Usando os dois lados da Cunha(**) XVI
2.10 Roldanas e a Barra(*) XVII

3 Desafios **XIX**
3.1 Problemas XIX
3.1.1 Anel de Polias(***) XIX
3.2 Dicas XX
3.2.1 Máquina de Atwood em cima da Mesa XX
3.2.2 Anel de Polias XX
3.3 Gabaritos XX
3.3.1 Máquina de Atwood em cima da Mesa XX
3.3.2 Anel de Polias XX

Introdução

Este material é endereçado aos alunos do 1° e 2° ano do ensino médio, ou seja, nível II da OBF. Contudo, para os alunos do nível I que já concluíram os demais materiais e livros indicados, que estão no nosso site, essa lista será um bom exercício.
Para melhor organizar, as questões foram classificadas com estrelas, seguindo uma ordem de dificuldade sendo três estrelas (***) para as mais difíceis.
Se você está no nível I, eu recomendo que comece pelas questões de uma e duas estrelas e não desanime se não conseguir resolver, eu também não conseguia, o importante é que você tente resolver os problemas, e, sobretudo, absorver as ideias lendo as soluções. Por fim, é importante que você aprenda com seus erros e estude cada vez mais.

Bons Estudos!

Capítulo 1

Enunciados

1.1 A Moeda no Copo(**)

A boca de um copo é coberta com um cartão circular e sobre o cartão coloca-se uma moeda (vide figura 1.1). Os centros do cartão e da moeda são coincidentes com o centro da boca do copo. Considere como dados deste problema: o Raio do cartão, **R**, o raio da boca do copo, **r**, e o coeficiente de atrito entre a moeda e o cartão, μ. O raio da moeda pode ser desprezado. Move-se o cartão horizontalmente, em trajetória retilínea e com aceleração constante. Determine o valor da menor aceleração do cartão, a_c, para que a moeda ainda caia dentro do copo, quando o cartão é retirado completamente.

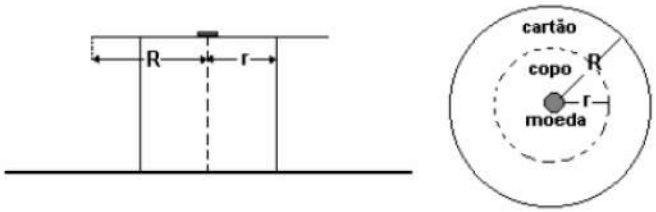

Figura 1.1: Vistas frontal e superior.

1.2 Usando as Polias(*)

No sistema de polias mostrado na figura 1.2 , qual deve ser a força aplicada na extremidade livre da corda para levantar o objeto de **2cm**?

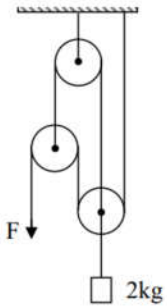

Figura 1.2: Esquema da Situação

1.3 Descendo pela Calha(**)

Na figura 1.3 , um caixote escorrega para baixo em uma vala inclinada cujos lados fazem um ângulo reto entre si. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a vala é μ_c. Qual é a aceleração do caixote em termos de μ_c, θ e g?

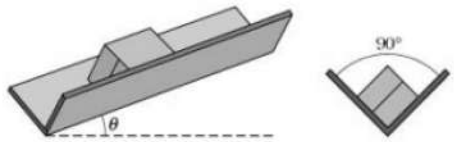

Figura 1.3: Vistas frontal e perpectiva.

1.4 Cunha como um referencial não-inercial(***)

Considere um plano inclinado (uma cunha) de massa **M** e ângulo de inclinação θ que pode deslizar sem atrito sobre o chão. Um pequeno bloco de massa **m** também pode deslizar sem atrito sobre a superfície do plano inclinado. Além disso, o bloco está preso por uma corda, que passa por uma polia no vértice superior da cunha, e que está amarrada a uma parede, conforme ilustra figura 1.4 .

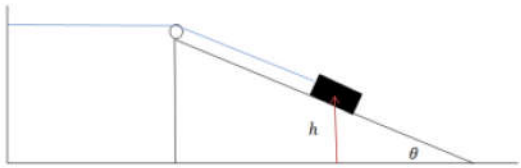

Figura 1.4: Esboço da Situação.

1.5 Bloco na Tábua(**)

Um bloco de massa **m** encontra-se sobre uma tábua de massa **M** e comprimento **L** que repousa sobre uma superfície horizontal. Despreze o atrito entre a tábua e a superfície e considere que existe atrito entre o bloco e a tábua, com coeficientes de atrito estático e cinético, respectivamente iguais a μ_e e a μ_c. Em um determinado instante é aplicada uma força horizontal **F**, sobre a tábua, conforme mostra a figura 1.5 .
a) Qual deve ser o valor de **F** para que o bloco comece a deslizar sobre a tábua?
b) Encontre o tempo **t** que o bloco levará para cair da tábua.

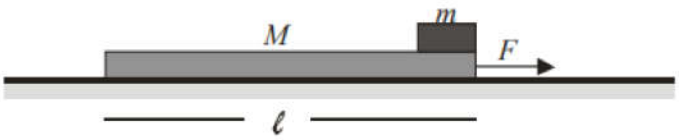

Figura 1.5: Esquema da Situação.

1.6 Faixa de Velocidades(**)

Um carro, movendo-se com velocidade constante, percorre uma pista circular com o raio **R** e inclinada de um ângulo θ.Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é μ_e, determine em que faixa de velocidades o condutor pode trafegar para que o carro não deslize na pista.

1.7 Força mínima para o movimento(*)

Uma caixa de madeira de peso P encontra-se em repouso sobre uma superfície plana. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície plana é μ_e.Posteriormente, um garoto começa a empurrar a caixa com uma força $\vec{F_r}$ crescente, que faz um ângulo θ com a horizontal, até que a caixa começa a se mover, como mostra a figura 1.6 . Calcule:
a) O menor valor de $\vec{F_r}$ para que a caixa se mova.
b) A força de reação normal à superfície, associada ao valor de $\vec{F_r}$ do ítem a), sobre o bloco.

1.8 Empurrando a Rampa(**)

Uma cunha de massa **M** submetida a uma força horizontal $\vec{F_r}$ (ver figura 1.7) encontra-se sobre uma superfície horizontal sem atrito. Coloca-se um bloco de massa **m** sobre a superfície inclinada da cunha. Se o coeficiente de atrito estático entre as superfícies da cunha e do bloco é μ e , encontre os valores máximos e mínimos da força $\vec{F_r}$ para que o bloco permaneça em repouso sobre a cunha.

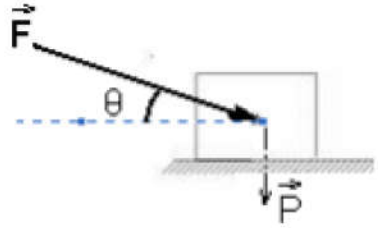

Figura 1.6: Situação para θ qualquer.

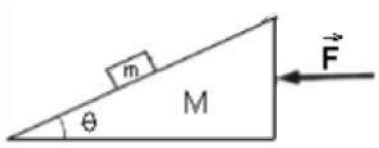

Figura 1.7: Esboço da Situação.

1.9 Usando os dois lados da Cunha(**)

Dois corpos com massas m_1 e m_2 estão conectados por uma corda(inextensível e de massa desprezível) que passa sobre uma roldana ideal fixa. No instante **t** = 0 , quando o desnível entre os corpos é **h** (veja figura 1.8) , eles são abandonados, a partir do repouso, de modo que o corpo de massa $m_1$desliza para baixo. Considere μ o coeficiente de atrito cinético entre os corpos e as superfícies.
a) Determine a aceleração que os corpos adquirem.
b) Após um tempo Δt ambos os corpos estarão a uma mesma altura. Determine Δt .

1.10 Roldanas e a Barra(*)

O dispositivo representado na figura 1.9 contém polias acopladas conforme mostrado. As polias maiores apresentam uma velocidade angular ω e são interligadas por uma barra, sobre a qual um corpo de massa m se encontra simplesmente apoiado. A distância do eixo de rotação das polias ao pino que as liga à barra vale **R** e o coeficiente de atrito estático entre o corpo e a barra vale μ. Com estes dados, desenvolva uma equação que mostre o valor máximo de ω:

a) para que o corpo continue apoiado na barra quando está no ponto mais alto de sua trajetória.

b) para que o corpo continue apoiado na barra, sem deslizar, quando está no ponto intermediário da trajetória, descendo, entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo.

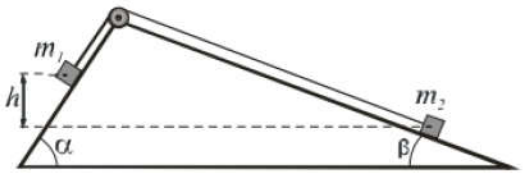

Figura 1.8: Situação do Problema.

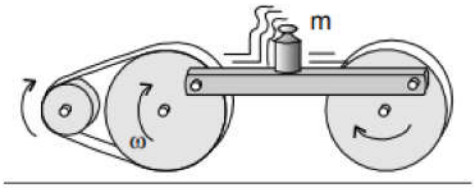

Figura 1.9: Representação para uma posição qualquer.

Capítulo 2

Soluções

2.1 A Moeda no Copo(**)

i) Inicialmente vamos trocar para o referencial do cartão, porém como não é um referencial inercial devemos adicionar a força fictícia devida:

$$\begin{cases} EixoX : ma_c - F_{at} = mA \Rightarrow ma_c - \mu N = mA \xRightarrow{\text{Eixo Y}} \boxed{A = a_c - \mu g} \\ EixoY : N = mg \end{cases}$$

ii) Da cinemática:

$$\begin{cases} \text{No referencial do Cartão:} \\ \Delta x = V_{0_x} t + \frac{At^2}{2} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2R}{A}}} \textbf{(I)} \\ \Delta x = R, \text{ pois a moeda deverá andar R} \\ \text{para cair, nesse referencial.} \\ V_{0_x} = 0 \end{cases}$$

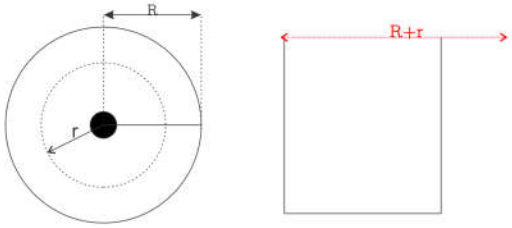

Figura 2.1: vistas superior e lateral.

$$\begin{cases} \text{No referencial da Terra:} \\ \Delta x = V_{0_x} t + \frac{a_c t^2}{2} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2(R+r)}{a_c}}} \textbf{(II)} \\ \Delta x = R + r, \text{ pois o cartão andará, no máximo, R+r(momento em que está na borda do copo.)} \\ V_{0_x} = 0 \end{cases}$$

iii) Igualando as equações I e II, temos:

$$\sqrt[2]{\frac{2R}{A}} = \sqrt[2]{\frac{2(R+r)}{a_c}} \Rightarrow a_c = \frac{(R+r)A}{R} \xRightarrow{\text{Eixo X}} \boxed{a_c = \frac{(R+r)\mu g}{r}}$$

2.2 Usando as Polias(*)

i) Usando o fato da força resultante nas polias serem iguais a zero e o fato de fios ideais transmitirem a mesma força neles aplicada, temos a situação representada pela figura 2.2 , logo:

Da Segunda Lei:

$\rightarrow 4F = mg$

(Quando o processo é praticamente estático, temos a situação de mínima força.Por isso, temos um equilíbrio quase estático durante todo o movimento.)

$\Rightarrow F = \frac{mg}{4} = 5N$

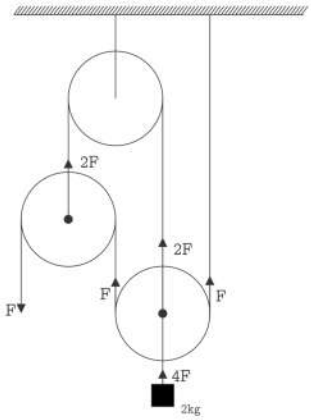

Figura 2.2: Esquema de forças.

Dica: Perceba que o resultado não deveria depender do deslocamento dito, uma vez que não há nenhum outro dado com dimensão somente de deslocamento para "anulá-la"deixando apenas a dimensão de Força do Peso.
Ex: $F = \frac{mg\Delta x}{L}$, onde L é um comprimento.

2.3 Descendo pela Calha(**)

i)Da Segunda Lei:

Ao observar os esquemas da figura 2.3 ,vem:

$$\begin{cases} N_r^2 = N^2 + N^2 \Rightarrow N_r = N\sqrt{2}(I) \\ N_r = mgcos\theta \overset{(I)}{\Rightarrow} N = \frac{\sqrt{2}mgcos\theta}{2}(II) \\ mgsen\theta - 2F_{at} = ma \overset{(II)}{\Longrightarrow} \boxed{a = g(sen\theta + \sqrt{2}\mu cos\theta)} \end{cases}$$

Nota: É importante perceber que a Força de atrito depende da superfície de contato, por esse motivo existe o fator dois na terceira equação. Ademais, a força normal que equilibra o peso é a resultante das normais de contato, por isso a primeira equação utiliza-se do teorema de pitágoras para calculá-la.

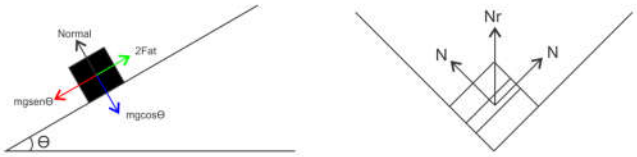

Figura 2.3: Vistas lateral e frontal.

2.4 Cunha como um referencial não-inercial(***)

Da segunda Lei:

Para o bloco no referencial da cunha:

$$\begin{cases} \text{Eixo tangencial: } mAcos\theta + mgsen\theta - T = ma \\ \text{Eixo Normal: } N + mAsen\theta = mgcos\theta \end{cases}$$

Para a Cunha no referencial da Terra:

$$\left\{ T(1 - cos\theta) + Nsen\theta = MA \right.$$

Do vínculo:

$$\left\{ A = acos\theta \right.$$

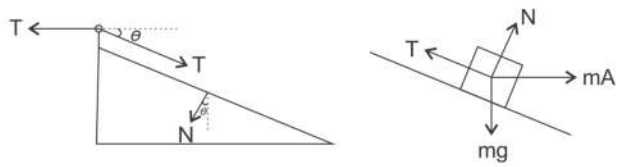

Figura 2.4: Esquemas de Forças.

Resolvendo o sistema, vem:

$$\boxed{A = \frac{mgsen\theta}{M + 2m(1 - cos\theta)}}$$

Mas para encontrarmos a velocidade adquirida pela cunha devemos usar a equação de Torricelli, para isso devemos saber qual o espaço percorrido pela cunha. Daí,

$\Delta x_{cunha} = \dfrac{h}{sen\theta}$, pois o fio desloca-se de $\dfrac{h}{sen\theta}$, por isso a cunha também o fará.

Da equação de Torricelli, obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + 2m(1 - cos\theta)}}$$

2.5 Bloco na Tábua(**)

i) Da segunda lei:

No referencial da Tábua:(devemos adicionar a força de inércia, pelo fato da tábua não ser um referencial inercial.)

$$\left\{ mA - F_{at} = ma \Rightarrow \boxed{a = \frac{F - \mu(m + M)g}{M}} (I) \right.$$

No referencial da Terra:

$$\left\{ F - F_{at} = MA \xRightarrow{\text{ref. na Terra}} A = \frac{(F - \mu mg)}{M} \right.$$

Da equação (I):

$a \geq 0 \Rightarrow \boxed{F \geq \mu(M+m)g}$

Para sabermos o tempo necessário, iremos agora apenas utilizar a aceleração já encontrada e fazê-lo percorrer todo o comprimento da tábua(L), logo:

$$a\frac{\Delta t^2}{2} = L \Rightarrow \boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{2ML}{F - \mu(m+M)g}}}$$

Figura 2.5: Esquema das Forças.

2.6 Faixa de Velocidades(**)

Da Segunda lei e usando o fato do movimento ser circular, temos as seguintes equações: Faremos para a situção de mínimo primeiro.

$$\begin{cases} \text{Eixo Y}: Ncos\theta + Fatsen\theta = mg \\ \text{Eixo X}: Nsen\theta - Fatcos\theta = \dfrac{mv^2}{2} \end{cases}$$

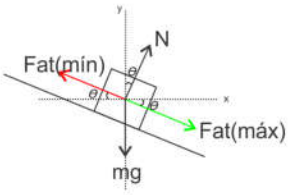

Figura 2.6: Esquema de Forças.

Resolvendo, temos:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2g(sen\theta - \mu cos\theta)}{cos\theta + \mu sen\theta}}$$

Analogamente, para o máximo:

Eixo Y : $Ncos\theta - Fatsen\theta = mg$

Eixo X: $Nsen\theta + Fatcos\theta = \dfrac{mv^2}{2}$

Resolvendo, temos:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2g(sen\theta + \mu cos\theta)}{cos\theta - \mu sen\theta}}$$

Portanto,

$$\sqrt{\frac{2g(sen\theta - \mu cos\theta)}{cos\theta + \mu sen\theta}} \leq v \leq \sqrt{\frac{2g(sen\theta + \mu cos\theta)}{cos\theta - \mu sen\theta}}$$

2.7 Força mínima para o movimento(*)

Da Segunda Lei, a partir do esquema da figura 2.7 , vem:

$$\begin{cases} \text{Eixo X:} \\ Fcos\theta - F_{at} = ma \geq 0(\text{Iminência}) \xRightarrow{\text{Eixo Y}} F \geq \boxed{\dfrac{\mu P}{cos\theta - \mu sen\theta}}(I) \\ \text{Eixo Y:} \\ N = P + Fsen\theta \end{cases}$$

Da equação (I) e da Equação do Eixo Y, temos:

$$\boxed{N = \frac{Pcos\theta}{cos\theta - \mu sen\theta}}$$

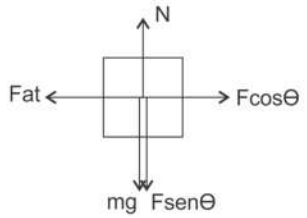

Figura 2.7: Esquema de Forças.

2.8 Empurrando a Rampa(**)

Na condição de máxima força o bloco tenderá a subir, por isso a força de atrito será na direção do plano e no sentido de descida. Daí vem que:

No referencial da Cunha:
I) $N = mAsen\theta + mgcos\theta$
II) $F_{at} + mgsen\theta = mAcos\theta$
No referencial da Terra:
III) $F = (m + M)A$
Juntando I,II e III, temos:
Fmáx= $\dfrac{(M + m)g(sen\theta + \mu cos\theta)}{(cos\theta - \mu sen\theta)}$

Na Condição de mínima força o bloco tenderá a descer, por isso a força de atrito será na direção do plano e no sentido de subida. Daí,analogamente, vem que:

No referencial da Cunha:
I) $N = mAsen\theta + mgcos\theta$
II) $-F_{at} + mgsen\theta = mAcos\theta$
No referencial da Terra:
III) $F = (m + M)A$
Juntando I,II e III, temos:
Fmín= $\dfrac{(M + m)g(sen\theta - \mu cos\theta)}{(cos\theta + \mu sen\theta)}$

Portanto,

$$\frac{(M+m)g(sen\theta - \mu cos\theta)}{(cos\theta + \mu sen\theta)} \leq F \leq \frac{(M+m)g(sen\theta + \mu cos\theta)}{(cos\theta - \mu sen\theta)}$$

Nota: Perceba que como de uma situção para outra o único fator que mudou foi a direção do atrito, por isso para prevermos o outro resultado partindo de um, basta apenas que troquemos o sinal do μ. Verifique!

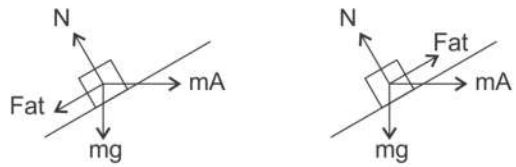

Figura 2.8: Situações de máximo e mínimo, respectivamente.

2.9 Usando os dois lados da Cunha(**)

Analisando o diagrama de força dos corpos:

$$\begin{cases} \text{Eixo Normal:} \\ N_1 = mgcos\alpha \\ N_2 = mgcos\beta \\ \text{Eixo tangencial:} \\ m_1 gsen\alpha - T - F_{at_1} = m_1 a_1 \\ T - m_2 gsen\beta - F_{at_2} = m_2 a_2 \\ \text{Vínculo do Fio:} \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

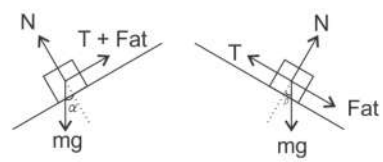

Figura 2.9: Diagrama de Forças.

Resolvendo esse sistema,encontramos:

$$\boxed{a = \frac{m_1 g(sen\alpha - \mu cos\alpha) - m_2 g(sen\beta + \mu cos\beta)}{m_1 + m_2}}$$

Para encontrarmos o tempo, devemos escrever as equações do eixo Y para os dois corpos:

$$\begin{cases} Y_1 = h - \dfrac{asen\alpha t^2}{2}, a_{y_1} = asen\alpha \\ Y_2 = \dfrac{asen\beta t^2}{2}, a_{y_2} = asen\beta \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $Y_1 = Y_2$, temos :

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{m_1 g(sen\alpha - \mu cos\alpha) - m_2 g(sen\beta + \mu cos\beta)}}}$$

2.10 Roldanas e a Barra(*)

Nesse problema, é necessário perceber que o corpo irá executar um movimento circular de raio R também, pois as duas roldanas giram com mesma frequência, a partir disso, temos duas situações:

Situação(I): $mg = m\omega^2 R - N \xRightarrow{N = 0 \; para \; \omega_{max}} \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}}$

Situação (II):

$$\begin{cases} F_{at} = \mu mg \\ F_{at} = m\omega^2 R \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}} \end{cases}$$

Figura 2.10: Situação I e II

Capítulo 3

Desafios

3.1 Problemas

Máquina de Atwood em cima da Mesa(**)

Considere a máquina de Atwood da figura 3.1 .As massas de 1kg e 2kg estão sobre uma mesa lisa, conectadas por uma corda que passa por uma polia. A polia é conectada a outra massa de 2kg, que desliza por outra polia como mostrado na figura 3.1 . Encontre as acelerações de todas as três massas.

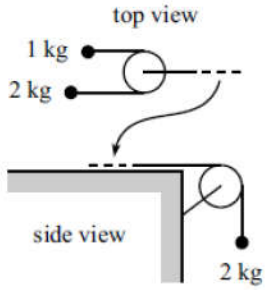

Figura 3.1: Vistas frontal e superior.

3.1.1 Anel de Polias(***)

Considere o sistema de polias mostrado na figura 3.2 . A corda (que é um loop sem fim) passa por **N** polias fixas. **N** massas $m_1, m_2, ..., m_N$, estão penduradas em **N** polias que são sustentadas pela corda (polias móveis). Qual é a aceleração de cada uma das massas?

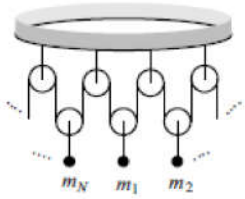

Figura 3.2: Polias ligadas.

3.2 Dicas

3.2.1 Máquina de Atwood em cima da Mesa

Adotar um referencial e ter atenção aos vínculos!

3.2.2 Anel de Polias

Trabalhar a matemática isolando as acelerações para poder utilzar a equação do Vínculo.

3.3 Gabaritos

3.3.1 Máquina de Atwood em cima da Mesa

$a_1 = \frac{2g}{7}, a_2 = \frac{-8g}{7}, a_3 = \frac{4g}{7}.$

3.3.2 Anel de Polias

$a_i = g(\frac{N}{m_i(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + ... + \frac{1}{m_{n-1}} + \frac{1}{m_N})})$

Referências Bibliográficas

[1]Introduction to Classical Mechanics,David Morin, Harvard University, Massachusetts.

[2]Provas Anteriores da OBF.