Operações elementares

Katarine Emanuela Klitzke

1 Introdução

Algo muito importante em olimpíadas, é conhecer o estilo da prova, o modo como os conteúdos são abordados nas questões e os caminhos que devem ser usados para resolver a prova. A OBMEP é composta na primeira fase do nível 1 aborda principalmente conteúdos vistos em sala de aula durante o programa do 6º e 7º ano do ensino fundamental, tais como frações, lógica, geometria plana, paridade, contagem, combinatória, álgebra elementar, questões de tabuleiro, sequencias, ... Neste primeiro material, serão apresentados alguns problemas das provas passadas, dando a solução e dicas de como resolvê-los.

A primeira coisa que devemos saber quando se estuda para olimpíadas, principalmente de matemática, é como realizar operações matemáticas (somas, subtrações, multiplicações, divisões, potenciações, radiciações, ...), afinal, é a partir daí que todo o resto da matemática é desenvolvido.

Veremos agora exemplos de como essas operações são importantes.

2 Problemas Resolvidos

Exemplo 1: Resolva as expressões abaixo:

a) $\frac{9}{2-\frac{1}{2}}$

b) $2^6+2^6+2^6-4^4+2^6$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{10}\right)$

Solução:

a) $\frac{9}{2-\frac{1}{2}}=\frac{9}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{9\times 2}{3}=6$

b) $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4=4\times 2^6-4^4=2^8-2^8=0$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

Problema 1 - (OBMEP 2015) Qual o algarismo das unidades do número?

$$1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13\times 15\times 17\times 19-2015$$

Solução:Basta analisarmos o algarismo das unidades em cada operação, ignorando o resto. Podemos calcular a expressão módulo 10, ou seja, analisar os restos das divisões por 10 (denota-as a congruência de números módulo x da seguinte maneira ab (mod x), para 13 módulo 10, por exemplo, temos 133(mod 10), pois o resto da divisão de 13 por 10 é 3.)
Primeiro coloquemos todos os números mod 10:

$$1\equiv 1(mod 10)$$
$$3\equiv 3(mod 10)$$
$$5\equiv 5(mod 10)$$
$$7\equiv 7(mod 10)$$

$$9 \equiv 9(mod 10)$$
$$11 \equiv 1(mod 10)$$
$$13 \equiv 3(mod 10)$$
$$15 \equiv 5(mod 10)$$
$$17 \equiv 7(mod 10)$$
$$19 \equiv 9(mod 10)$$
$$2015 \equiv 5(mod 10)$$

Assim,

$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 - 2015 \equiv 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 - 5 \equiv 15 \times 63 \times 15 \times 63 - 5 \equiv 5 \times 3 \times 5 \times 3 - 5 \equiv 15 \times 15 - 5 \equiv 5 \times 5 - 5 \equiv 25 - 5 = 20 \equiv 0(mod 10)$

Logo, o algarismo das unidades será dado por 0.

solução 2: Você poderia perceber que não há algarismos pares sendo multiplicados, porém você tem o algarismo 5 na multiplicação, logo, o algarismo das unidades de $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19$ será 5. Quando subtraíres 5 unidades de 2015, o resto será 0.

Problema 2(OBMEP 2016)Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

solução Sabe-se que o maior número de 3 algarismos é o 999, pois bem, dividamos 999 por 13 e vejamos o resto. $999 = 76 \times 13 + 11 \rightarrow$ o maior múltiplo de 13 de três algarismos será $76 \times 13 = 988$.
Agora que já sabemos qual o número que o problema faz referência, basta somarmos os seus algarismos: 9+8+8 = 25.

Problema 3)(OBMEP 2015) As contas $AB \times C = 195$ e $CDE \div F = 88$ estão corretas sendo A,B, C, D, e F algarismos diferentes. O número AB é formado pelos algarismos A e B e o número CDE é formado pelos algarismos C, D e E. Qual é o algarismo representado pela letra F?

Solução : Fatorando 195 encontramos $195 = 5 \times 3 \times 13$ logo, C ou é igual a 3 ou a 5, pois apresenta apenas um algarismo.

Sabemos também que CDE = 88F. Achemos os múltiplos de 3 algarismos de 88 que possuem como algarismo das centenas 3 ou 5.

Múltiplos de 88 da forma 3DE = 352
Múltiplos de 88 da forma 5DE = 528

Vejamos agora qual o caso que obedece a todas as regras estabelecidas pelo enunciado.

$$(i)C = 3 \rightarrow A = 6, B = 5, C = 3, D = 5, E = 2, F = 4$$

$$(ii)C = 5 \rightarrow A = 3, B = 9, C = 5, D = 2, E = 8, F = 6$$

Veja que no caso (I), temos dois algarismos 5 aparecendo, logo, o correto é (ii), e, portanto, F=6.

Problema 4)(OBMEP 2015) Ana listou todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é par e os outros dois são ímpares e diferentes entre si. Beto fez outra lista com todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é ímpar e os outros dois são pares e diferentes entre si. Qual é a maior diferença possível entre um número da lista de Ana e um da lista de Beto?

SoluçãoComo queremos a maior diferença, basta pegarmos o maior número que Ana pode formar e o menor que Beto listou e subtraí-los.
Os maiores algarismos que Ana pode obter são: 7,8 e 9. A permutação desses algarismos que gerará o maior número é 987, portanto, esse será o maior número de Ana.
Achemos agora o menor número de Beto. Os algarismos serão: 1,2 e 4, gerando o número 124. A diferença, portanto, será 987-124 = 863.

Problema 5)(OBMEP 2015))Rita deixou cair suco no seu caderno, borrando um sinal $*$ de operação $(+,\breve{}, \times ou \div)$ e um algarismo ? em uma expressão que lá estava escrita. A expressão ficou assim:

$$25+8*4-?\times 9=0$$

Qual foi o algarismo borrado?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Solução Achemos primeiro qual o símbolo omitido, para isso, testemos alguns casos:

*Se o sinal omitido foi o de multiplicação, então 9|25 + 32 = 57, o que não é verdade;
*Se o sinal omitido foi o de soma, então 9|25 + 8 + 4 = 37, absurdo;
*Se o sinal omitido foi o de subtração, então 9|25 + 8 – 4 = 29, absurdo;
*Se o sinal omitido foi o de divisão, então 9|25 + 2 = 27, verdade;
Logo, para a equação ser verdadeira, é necessário que $27 = * \times 9 \rightarrow * = 3$, e a alternativa correta é a de letra B)3.

|Problema 6)(OBMEP 2012) A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?

A) 24
B) 37
C) 40
D) 45
E) 48

Solução: Veja que $0,48 = 48 \div 100$, logo, a quantidade mínima de alunos dessa turma será a soma do numerador e do denominador da fração irredutível de $\frac{48}{100} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$. Assim, a resposta será 12+25 = 37 , alternativa B.

3 Problemas propostos

|Problema 7)(Banco de Questões OBMEP 2014) Chamamos de "último algarismo de um número" como o algarismo mais à direita. Por exemplo, o último algarismo de 2014 é o algarismo 4.

a) Qual o último algarismo de 11^{11}
b) Qual o último algarismo de 9^9 ? E qual o último algarismo de 9219^{9129}
c) Qual o último algarismo de 2014^{2014}

|Problema 8 São dados 5 dígitos distintos de 1 a 9. Arlando forma o maior número possível usando três desses 5 dígitos. Em seguida Bernaldo escreve o menor número possível usando três desses 5 dígitos. Qual o dígito da unidade da diferença entre o número de Arnaldo e o número de Bernaldo?

|Problema 9 João possui mais que 30 e menos que 100 chocolates. Se ele organizar os chocolates em linhas de 7, sobrará 1. Caso ele os organiza em linhas de 10, sobrarão 2. Quantos chocolates ele possui?

|Problema 10)(Banco de Questões OBMEP 2015) Maria acaba de ganhar uma barra enorme de chocolate como presente de páscoa. Ela decide dividi-lo em pedaços para comê-los aos poucos. No primeiro dia, ela divide em 10 pedaços e come apenas um deles. No segundo dia, ela divide i, dos pedaços que sobrara do dia anterior em mais 10 pedaços e come apenas um deles. No terceiro dia, ela faz mesmo, ou seja, divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em outros 10 pedaços e come apenas um deles. Ela continua esse procedimento até a páscoa do ano seguinte.

a) Quantos pedaços ela terá no final do terceiro dia?
b) É possível que ela obtenha exatamente 2014 pedaços em algum dia?

|Problema 11)(Banco de Questões OBMEP 2014)Problema 11)(Banco de Questões

OBMEP 2014) Usando os algarismo distintos a, b, e c , Araceli escreveu o número abc, e Luana escreveu os números ab,bc, e ca. Encontre os algarismos a,b, e c, sabendo que a soma dos números escritos por Luana coincide com o número escrito por Araceli.

4 Dicas e soluções

Problema 7)a)1 b)9 c)6

Problema 8) (Dica) Os algarismos desses números serão distintos e a diferença entre eles gerará sempre o mesmo algarismo, independente da escolha dos 5 algarismos.

Problema 9) A solução desse problema se resume a apenas regra de divisibilidade de números.

Problema 10)a)(Dica) Não se esqueça que ao final do terceiro dia ela já terá feito a divisão e comido um pedaço.
b)Analise se a fração encontrada pode ser um número inteiro, caso sim, o dia ocorrerá, caso contrário, não será possível.

Problema 11)(dica) Perceba que abc = 100a + 10b + c e que ab = 10a +b, bc = 10b+c, ca = 10+a , logo $abc = ab + bc + ca \rightarrow 89a = 10c + b = bc$, ou seja, um número de dois algarismos, logo, a tem que ser tal que 89a possua apenas dois algarismos.

5 Fontes

Obmep
Círcuos Matemáticos – Fomin
POTI