

Lógica Matemática

Luan Arjuna



1 Introdução

Neste material estudaremos lógica matemática, um assunto de extrema importância para quem deseja estudar matemática olímpica. Para esse estudo, não serão necessários conhecimentos sobre fórmulas ou teoremas específicos. Lógica matemática é um tópico simples e intuitivo, mas seu entendimento pode levar à resolução de problemas aparentemente bastante complexos. Vejamos alguns exemplos.

2 Problemas Resolvidos

Problema 1 (OBMEP 2018) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as

seguintes declarações:

- **Emília: Não fui eu.**
 - **Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.**
 - **Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.**
 - **Rafaela: Não foi a Luísa.**
 - **Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.**
- Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?**

Solução: Observe que todas as meninas fizeram afirmações acerca de quem fez o desenho, com exceção de Vitória, que fez uma afirmação sobre quem disse a verdade. Analisaremos primeiro a afirmação de Vitória. Para essa afirmação (assim como todas as outras), temos duas possibilidades:

1) Vitória disse a verdade: Então Luísa mentiu e as demais disseram a verdade (pois sabemos que apenas umas das meninas mentiu).

2) Vitória mentiu: Então todas as outras meninas disseram a verdade (pois sabemos que apenas umas das meninas mentiu).

Dessa forma, sabemos que Emília, Marília e Rafaela certamente disseram a verdade, logo:

- i) Emília não fez o desenho.
- ii) Nem Rafaela nem Vitória fizeram o desenho.
- iii) Luísa não fez o desenho.

Logo, por eliminação, quem fez o desenho foi Marília.

Problema 2 (OBMEP 2016) Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria. Ela perguntou: – Que dia da semana é hoje? – Hoje é quinta, disse João. – É sexta, respondeu Maria. Depois perguntou: – Que dia da semana será amanhã? – Segunda, falou João. – Amanhã será domingo, disse Maria. Finalmente ela perguntou: – Que dia da semana foi ontem? – Terça, respondeu João. – Quarta, disse Maria. Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

Solução: De acordo com as afirmações do João, temos que:

- i) Hoje é quinta
- ii) Amanhã será segunda (logo hoje é domingo)
- iii) Ontem foi terça (logo hoje é quarta)

Sabemos que exatamente uma dessas afirmações é verdadeira, logo, hoje é quinta, domingo ou quarta.

De acordo com as afirmações de Maria, temos que:

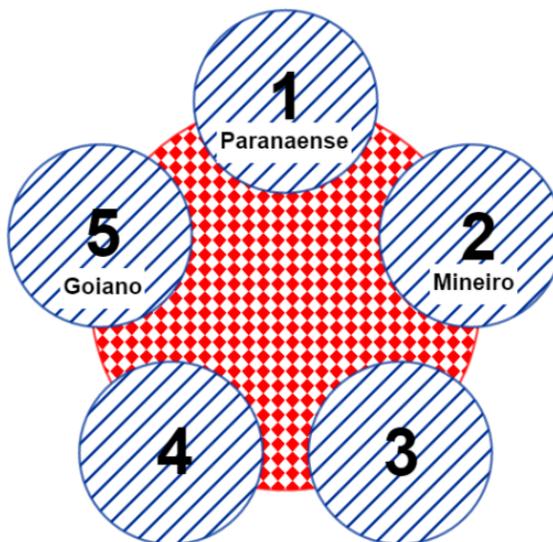
- i) Hoje é sexta
- ii) Amanhã é domingo (logo hoje é sábado)
- iii) Ontem foi quarta (logo hoje é quinta)

Sabemos que exatamente uma dessas afirmações é verdadeira, logo, hoje é sexta, sábado ou quinta.

Assim, concluímos que hoje é quinta

Problema 3 (OBMEP 2015) Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

Solução: Observe a seguinte representação da mesa:



na mesa.png na mesa.png

Sabemos que:

1. O paranaense é vizinho do goiano e do mineiro
2. Edson é vizinho de Carlos e do sergipano
3. O goiano é vizinho de Edson e Adão
4. Bruno é vizinho do tocaninense e do mineiro

Observe a afirmação 1. Vamos supor sem perda de generalidade que o paranaense está na cadeira 1, o goiano na cadeira 5 e o mineiro na cadeira 2. Observe a afirmação 4. Bruno é vizinho do mineiro, logo, Bruno está na cadeira 1 ou na cadeira 3, mas Bruno também é vizinho do tocaninense, logo, Bruno não pode estar na cadeira 1, caso contrário, seus vizinhos seriam o mineiro e o goiano (nenhum tocaninense), logo, Bruno está na cadeira 3, e, conseqüentemente, o tocaninense está na cadeira 4. Concluimos, assim, que Bruno, que está na cadeira 3, é o sergipano. Sabemos pela afirmação 2 e pela afirmação 3 que Edson é vizinho do sergipano e do goiano, logo, Edson está na cadeira 4. Pela afirmação 4, o outro vizinho do sergipano é Carlos, logo, Carlos está na cadeira 2, portanto, Carlos é o mineiro.

(Para sua melhor compreensão, faça seu próprio desenho da mesa e anote as informações sobre quem está sentado em cada lugar conforme vamos descobrindo-as)

Nota: Uma estratégia muito comum neste tipo de problema é fazer uma suposição e concluir que essa suposição não pode ser verdadeira. Chamamos isso de “demonstração por absurdo”

3 Problemas Propostos

Problema 4 (OBMEP 2013) Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo.

A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?”

Guto disse: “O meu não tocou”,

Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O de Guto não tocou”.

Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual

das seguintes afirmativas é verdadeira?

- A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
- B) Bernardo mentiu.
- C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
- D) Carlos mentiu.
- E) Guto falou a verdade.

Problema 5 (OBMEP 2012) Amanda, Bianca e Carolina são amigas e têm idades diferentes. Sabe-se que, das sentenças a seguir, exatamente uma é verdadeira.

- I. Amanda e Carolina são mais jovens que Bianca.
- II. Amanda é mais velha que Bianca.
- III. Amanda é mais velha que Bianca e Carolina.
- IV. Amanda não é nem a mais nova nem a mais velha das amigas.

Qual das alternativas mostra o nome das três amigas em ordem crescente de idade?

- A) Amanda, Bianca, Carolina
- B) Carolina, Bianca, Amanda
- C) Bianca, Carolina, Amanda
- D) Carolina, Amanda, Bianca
- E) Amanda, Carolina, Bianca

Problema 6 (OBMEP 2010) Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: “Bruno é uma preguiça”.
- Bruno diz: “Carlos é um tamanduá”.
- Carlos diz: “Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais”.
- Daniel diz: “Adriano é uma preguiça”.

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

Problema 7 (OBMEP 2009) Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois ca-

sais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:

- A) Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
- B) Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
- C) Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
- D) Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
- E) Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

Problema 8 (OBMEP 2010) Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

- A) Ari; água
- B) Bruna; água
- C) Carlos; suco
- D) Ari; suco
- E) Bruna; suco

Problema 9 (Clubes de Matemática da OBMEP)

link: <http://clubes.obmep.org.br/blog/>

Aline, Bruna, Carla, Diana e Eduarda são irmãs. Na casa delas, havia um último bolinho delícia. Sabe-se que apenas uma delas comeu o bolinho todo. Ao perceber a falta do bolinho, a mãe das meninas perguntou quem o havia comido e obteve as seguintes respostas:

Aline: “Bruna não comeu o bolinho”.

Bruna: “Eduarda comeu o bolinho”.

Carla: “Aline não comeu o bolinho”.

Diana: “Carla comeu o bolinho”.

Eduarda: “Aline comeu o bolinho”.

Se a mãe sabe que apenas três das cinco disseram a verdade em sua fala e se quem comeu o bolinho mentiu na sua fala, então, quem comeu o último bolinho delícia?

4 dicas e soluções

Problema 4: Observe que Bernardo e Guto disseram a mesma coisa, mas só um dos garotos disse a verdade.

Problema 5: Se a afirmação III é verdade, então a afirmação II também é, mas isso é absurdo, pois só uma das afirmações é verdadeira, logo, a afirmação III é falsa, portanto, Amanda não é a mais velha das amigas. Se a afirmação II é verdade, então Amanda é mais velha que Bianca, mas Amanda não pode ser a mais velha de todas, então Amanda é mais nova que Carolina, logo, a afirmação IV é verdadeira, o que também é um absurdo. Logo, a afirmação II não pode ser verdade. Mostre que a afirmação IV também é falsa e conclua o problema.

Problema 6: Suponha que Adriano é um tamanduá.

Problema 7: Arnaldo é mais novo que Dalila, logo, ele não é o mais velho, logo, o esposo de Dalila (que é o mais velho) é Beto. Assim, concluímos que Celina é mais nova que Arnaldo que é mais nova que Dalila que é mais nova que Beto, Dalila é esposa de Beto e Celina é esposa de Arnaldo.

Problema 8: Se Ari pede suco, Bruna e Carlos pedem a mesma bebida. Suponha que isso aconteça.

Problema 9: Veja que, se Aline comeu o bolinho, então Aline mentiu ao dizer que Bruna não comeu o bolinho, logo, Bruna comeu o bolinho, mas isso é absurdo, pois só uma das meninas comeu o bolinho. Concluímos que Aline não comeu o bolinho, logo, Carla disse a verdade, logo, Carla também não comeu o bolinho (pois quem comeu o bolinho mentiu). Assim, concluímos que quem mentiu foram Diana e Eduarda, portanto, Bruna disse a verdade: Eduarda comeu o bolinho.

5 Gabarito

Problema 4: alternativa b)

Problema 5: alternativa e)

Problema 6: três dos amigos são tamanduás

Problema 7: alternativa c)

Problema 8: alternativa a)

Problema 9: Eduarda comeu o último bolinho delícia.