Paridade

Katarine Emanuela Klitzke

1 Introdução

Estudaremos nesse breve material, um pouco sobre paridade. Esse assunto pode parecer bem “fácil”, afinal é uma das primeiras coisas que aprendemos em matemática, porém, paridade é um algo que pode nos levar a vários problemas bem divertidos e desafiadores. Mas vamos com calma.

2 O que é paridade?

Paridade é a classificação que damos a números ou coisas dependendo de uma característica específica sua: ser em quantidade par ou por quantidade ímpar. Quando um número é par, dizemos que sua paridade é par, e quando um número é impar, dizemos que apresenta paridade ímpar, por exemplo, 0 tem paridade par, já

9 tem paridade ímpar, de modo geral, um número é par se ele pode ser escrito da forma 2k, com k sendo um número inteiro, e um número é ímpar de pode ser escrito da forma 2k+1, com k sendo um número inteiro. Simplificando, um número é dito par se é múltiplo de 2, e ímpar caso não seja.

3 Regras de Paridade

$Par + Par = par$
$(2k+2y = 2 \times (K+y))$

$Par + impar = impar$
$(2k+1+2y = 2 \times (k+y)+1)$

$impar + impar = par(2k+1+2y+1) = 2 \times (k+y+1))$

$Par \times par = par$
$(2k \times 2y = 2 \times (2ky))$

$Par \times impar = par$
$(2k \times (2y+1) = 2 \times (k \times (2y+1)))$

$impar \times impar = impar$
$((2k+1) \times (2y+1) = 2k \times 2y + 2k + 2y + 1 = 2 \times (2ky + k + y) + 1)$

4 Problemas Resolvidos

Problema 1) Nove engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia (todas estão ligadas a outras duas engrenagens). É possível que todas as engrenagens possam rodar simultaneamente?

Solução: A resposta é não. Imagine que a primeira engrenagem gire no sentido horário, então a próxima engrenagem (engrenagem 2) girará no sentido anti-horário, a vizinha dessa (engrenagem 3) por sua vez, girará no sentido horário, e assim sucessivamente. Logo, as engrenagens ímpares devem girar no sentido horário, e as pares no sentindo anti-horário, mas isso implicaria em a primeira e a nona engrenagem girarem ambas no sentido horário, o que é uma contradição, logo, não será possível.

Problema 2) Um tabuleiro 5x5 pode ser coberto por dominós 1x2?

SoluçãoVeja que o tabuleiro apresenta um total de 5x5 = 25 casas, ou seja, uma quantidade ímpar, já cada peça de dominó 1x2 = 2, uma quantidade par, logo, não é possível.

Problema 3)São colocadas vinte e cindo peças em um tabuleiro de damas 25x25 de tal modo que suas posições são simétricas em relação a uma de suas diagonais. Prove que existe pelo menos uma peça sobre a diagonal e caso haja mais, elas são em uma quantidade ímpar sempre.

SoluçãoCaso não haja peças sobre a diagonal, então todas as peças do tabuleiro seriam aos pares (uma de cada lado em relação à diagonal), e assim, teríamos uma quantidade sempre par de peças, mas como 25 é ímpar, chegamos a um absurdo! Logo, há pelo menos uma peça sobre a diagonal. Provemos agora que a quantidade de peças sobre a diagonal sempre será ímpar. Suponha que haja uma quantidade par sobre a diagonal, então existirá uma quantidade ímpar que ocupa os dois planos de simetria, o que é um absurdo, pois elas sempre vêm aos pares.

Problema 4) Mostre que na igualdade abaixo é impossível que todos os denominadores sejam ímpares

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

Solução Perceba que

$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1 \rightarrow \frac{bcd+acd+adb+abc}{abcd}=1$

sendo todos ímpares temos,

abcd ímpar

$bcd + acd + adb + abc = impar + impar + impar + impar = par + par = par$

O que implicaria em par = ímpar, ou seja, um absurdo.

Problema 5)(OBMEP 2005) Qual das expressões abaixo tem como resultado um número ímpar?

a)$7 \times 5 \times 11 \times 13 \times 2$
b)$(2005 - 2003) \times (2004 + 2003)$
c)$7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$
d)$5^2 + 3^2$
e)$3 \times 5 + 7 \times 9 + 11 \times 13$

SoluçãoPerceba que no item a, temos o número 2 na multiplicação, logo o número será par; No item b, temos 2005˘2003 = 2, logo, o número será múltiplo de dois; No item c, temos ímpar somado seis vezes, ou seja, como $impar + impar = par$, teremos $par + par + par = par$; No item d, temos $impar \times impar + impar \times impar = impar + impar = par$ E por fim, em e) temos, $impar \times impar$ uma quantidade ímpar de vezes, $impar + impar + impar = par + impar = impar$. Resposta correta, item e)

Problema 6)É possível trocar uma nota de 25 rubros em dez notas com valores 1 3, e 5 rubros?

SoluçãoNão é possível. Perceba que 25 e uma quantidade ímpar, já a soma de dez valores ímpares será par, o que implicaria que ímpar = par, ou seja, um absurdo!!

5 Problemas propostos

Problema 7)É possível encontrar 5 números ímpares cuja soma é 100?

Problema 8 É possível em cavalo começar na posição a1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em h8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

|Problema 9 Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

|Problema 10) Os números de 1 a 10 são escritos em uma linha. Pode-se colocar s sinais de "+" e "-" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja 0?

|Problema 11(OBMEP 2008) Observe que no tabuleiro 4×4 as duas diagonais cortam 8 quadradinhos. Já no tabuleiro 5×5, as duas diagonais cortam 9 quadradinhos. Em qual tabuleiro as diagonais cortam 77 quadradinhos?

|Problema 12)(OBMEP 2008 – 2ª fase) Para obter o "resumo" de um número de até 9 algarismos, devemos escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e finalmente quantos são seus algarismos pares.
Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.

a) Encontre um número cujo resumo seja 523.
b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.
c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo do seu resumo. Mostre que esse procedimento levará sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

6 Dicas

Problema 7)Regras de paridade.

Problema 8)O cavalo anda em L. Procure analisar também a cor das casas em cada novo movimento do cavalo e as cores das casas a1 e h8.

Problema 9)Regras de paridade.

Problema 10)Regras de paridade.

Problema 11) Faça os desenhos dos casos citados e analise os resultados obtidos.

Problema 12)no item c), faça alguns casos iniciais, descubra esse número e depois prove pelas paridades e pelas regras do jogo.

7 Fontes

OBMEP -Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Círcuos Matemáticos – Fomin