Teorema de Pitágoras

Luan Arjuna

1 Introdução

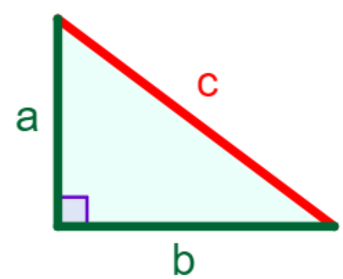
Uma das maiores preocupações dos matemáticos da antiguidade era a determinação de comprimentos: desde a altura de um edifício até a distância entre duas cidades, ou até mesmo planetas. Uma das maiores contribuições para a determinação de medidas é o teorema de Pitágoras, que estabelece uma relação muito interessante entre os lados de qualquer triângulo retângulo. Veremos nesse material seu enunciado e algumas de suas aplicações.

Antes do enunciado, devemos estar familiarizado com algumas nomenclaturas do triângulo retângulo. Observe a figura.

i) Um **triângulo retângulo** é um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, de noventa graus.

ii) Chamamos de **catetos** os dois lados adjacentes (vizinhos) ao ângulo de noventa graus (em verde).

iii) Chamamos de **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo de noventa graus (em vermelho).

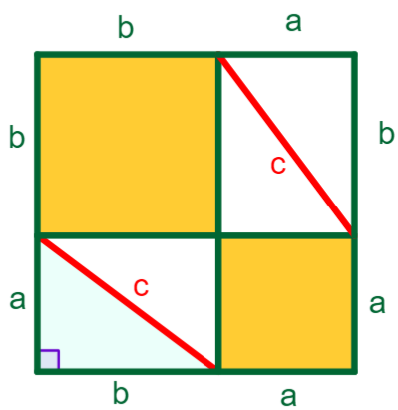


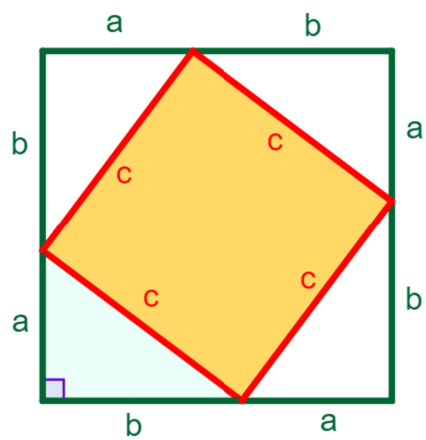
2 Enunciado

O teorema de Pitágoras diz que "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", isto é, na figura acima, teríamos que

$$a^2+b^2 = c^2$$

Demonstração: Mostraremos nesse material uma demonstração visual do teorema. Recomendamos aos leitores que pesquisem demonstrações alternativas, ou que tentem demonstrar por si mesmos de outras maneiras.





Veja que em ambos as figuras a área em amarelo é a mesma, igual a área do quadrado de lado $(a+b)$ (o quadrado grande) menos a área de quatro triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c. A única que coisa que fizemos foi mudar a posições dos quatro triângulos retângulos. Veja que a área em amarelo na figura da esquerda vale a^2+b^2, pois ela é composta por um quadrado de lado a e um quadrado de lado b, e que na da figura da direita a área em amarelo vale c^2, já que temos um quadrado de lado c. Dessa forma, concluímos que $a^2+b^2=c^2$.

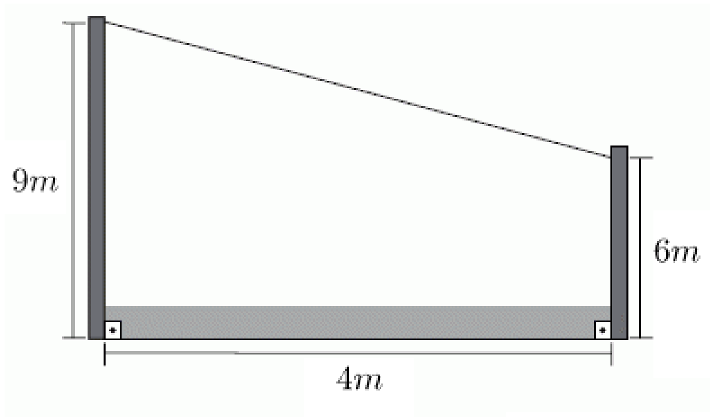
Você pode recortar o quadrado maior e os quatro triângulos em cartolina para uma melhor visualização. Note que os triângulos devem ser todos iguais, retângulos, e que o quadrado deve ter lado igual a soma dos catetos.

Nota 1: A recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira, isto é, se um triângulo possui lados de comprimentos a, b e c, e temos que $a^2+b^2=c^2$, então esse triângulo é um triângulo retângulo.

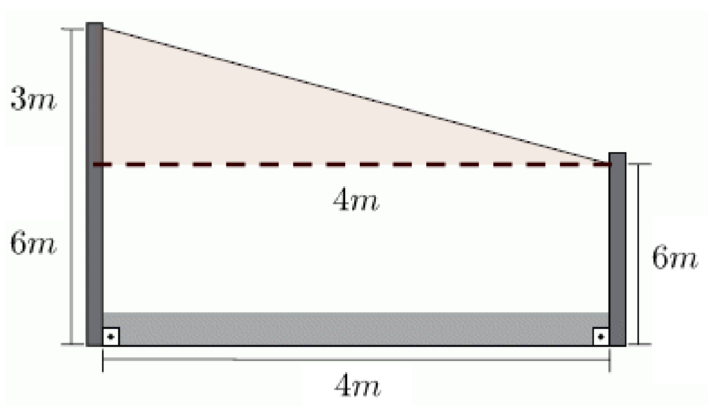
Nota 2: Uma consequência bastante imediata do teorema de Pitágoras é que a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo.

3 Aplicações

<u>Problema 1</u> Um fio possui uma extremidade presa a um poste de 9 metros de altura e a outra presa a um poste de 6 metros de altura, como na figura. Sabendo que a distância entre os postes é de 4 metros, calcule o comprimento do fio.



Solução:



Observe que, traçando uma reta saindo da extremidade do poste menor e perpendicular ao poste maior, obtemos um triângulo retângulo de catetos medindo $3m$ e $4m$. Seja x o comprimento do fio. Pelo teorema de Pitágoras, teremos que $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5m$.

Nota: O triângulo de lados 3, 4, 5 é um triângulo retângulo muito famoso no mundo da matemática. Caso você veja em alguma questão um triângulo que tem essas medidas, saiba de imediato que se trata de um triângulo retângulo. O mesmo vale para triângulos semelhantes, ou seja, com lados $3k$, $4k$ e $5k$, onde k é um número qualquer. Por exemplo, o triângulo de lados 6, 8, 10 é retângulo, pois

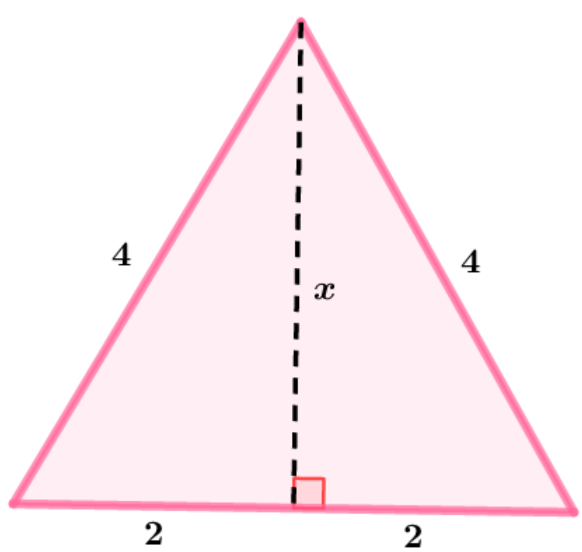
$6 = 3 \times 2$, $8 = 4 \times 2$ e $10 = 5 \times 2$. De fato, caso queiramos conferir pelo teorema de Pitágoras, teremos que

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

Problema 2 Determine a área de um triângulo equilátero de lado 4**.**

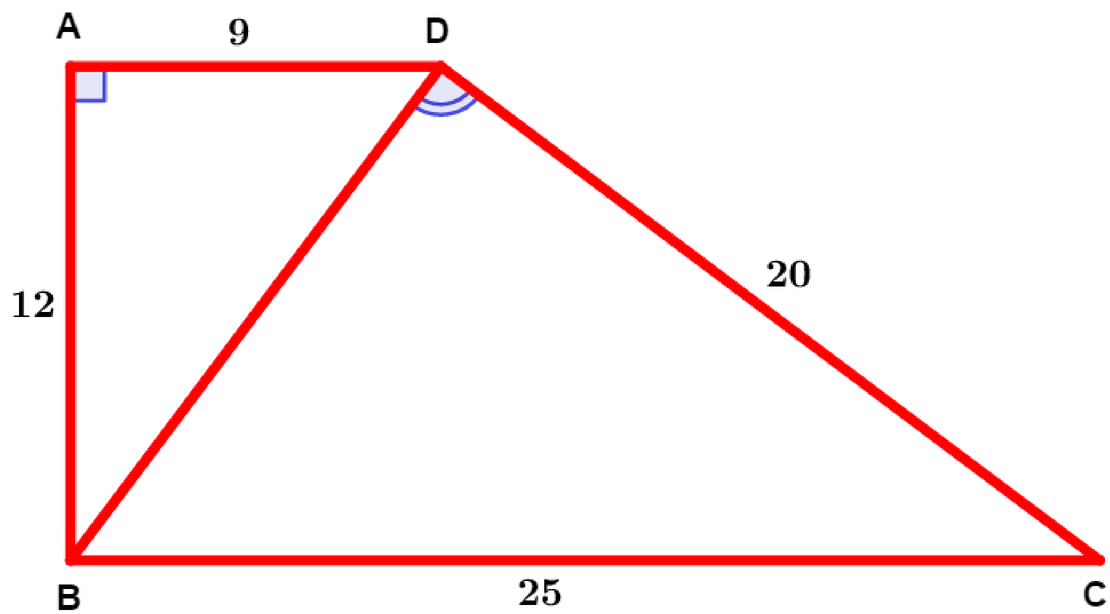
Solução: Sabemos que a área de um triângulo é igual a sua base multiplicada pela sua altura dividida por 2. A base do nosso triângulo nós já conhecemos. Nos resta encontrar a sua altura. Veja que a altura de um triângulo qualquer sempre o divide em dois triângulos retângulos, o que torna bastante sugestivo o uso do teorema de Pitágoras. No caso do triângulo equilátero, sabemos que a altura corta sua base em dois pedaços iguais. Como a base do triângulo vale 4, cada um dos pedaços deverá valer $\frac{4}{2} = 2$. Seja x a medida da altura do triângulo. Temos, dessa forma, um triângulo retângulo de catetos x, 2 e hipotenusa 4. Pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{gathered} x^2 + 2^2 = 4^2 \\ \Rightarrow x^2 + 4 = 16 \\ \Rightarrow x^2 = 16 - 4 = 12 \\ \Rightarrow x = \sqrt{12} \end{gathered}$$



Logo, a área do triângulo em questão será de $\frac{4\sqrt{12}}{2} = 2\sqrt{12}$

<u>Problema 3</u> um quadrilátero $ABCD$ é tal que $AB = 12$, $BC = 25$, $CD = 20$ e $DA = 9$, como mostra a figura. Sabendo que o ângulo $\angle BAD = 90$, prove que $\angle BDC = 90$.



Solução: Inicialmente, veja que BD é hipotenusa do triângulo ABD, logo, pelo teorema de Pitágoras

$$BD^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Nós poderíamos tirar a raiz de ambos os lados para encontrarmos o valor de BD, mas você verá futuramente que isso não será necessário.

Queremos mostrar que $\angle BDC = 90$. Como já vimos, pela recíproca do teorema de Pitágoras, basta mostrarmos que $BD^2 + CD^2 = BC^2$. Ora, sabemos que $BD^2 = 225$, e que $DC^2 = 20^2 = 400$, logo

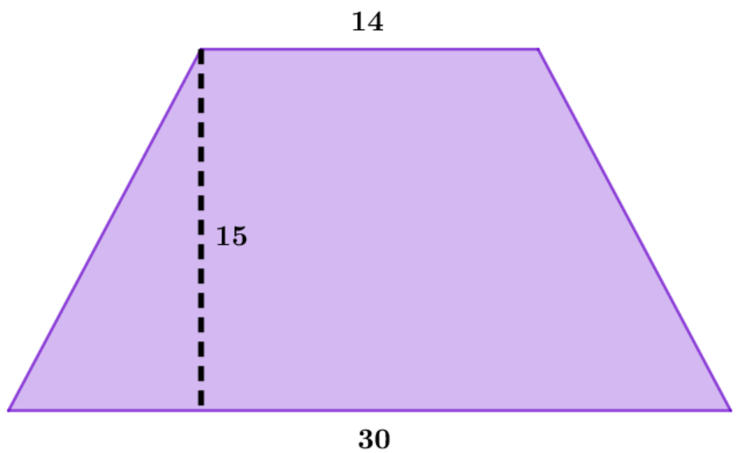
$$BD^2 + DC^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2 = BC^2$$

De modo que está provado que o ângulo em questão é de noventa graus.

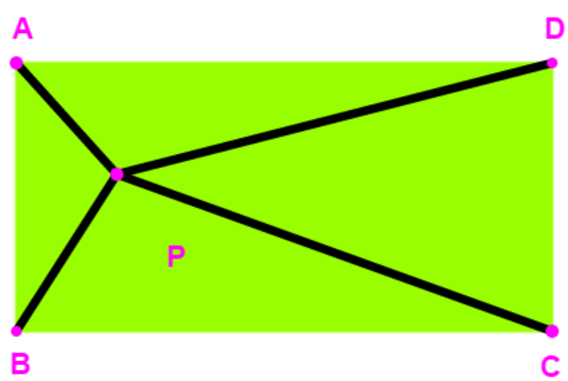
4 Problemas Propostos

Problema 4 **Dado um triângulo de lados** 10**,** 10 **e** 12**, calcule a altura relativa ao lado de comprimento** 12**.**

Problema 5 **Um trapézio isósceles tem bases medindo** $14cm$ **e** $30cm$**, e sua altura mede** $15cm$ **Calcule seu perímetro.**



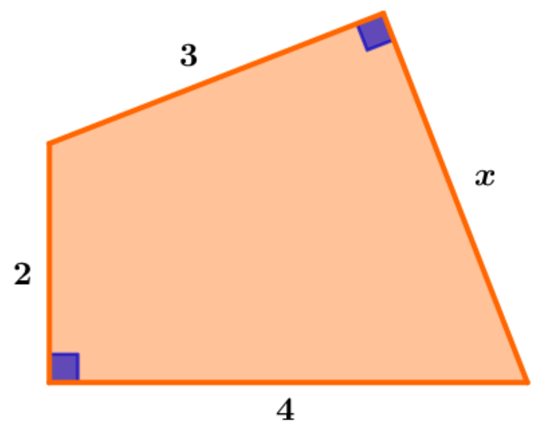
Problema 6 **Seja** P **um ponto qualquer no interior de um retângulo** $ABCD$**. Prove que** $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$**.**



Problema 7 **Um ponto P é interior ao retângulo $ABCD$ e tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Calcule PD.**

Problema 8 **Calcule a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.**

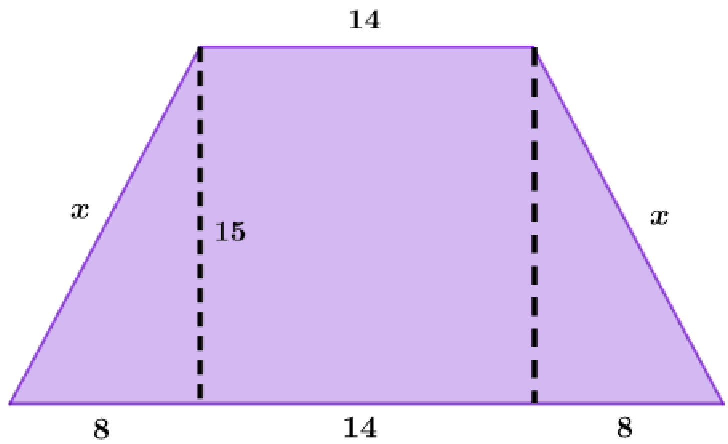
Problema 9 **Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado AB.**



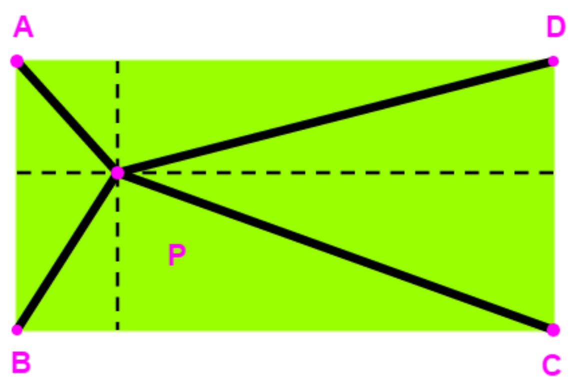
5 dicas

Problema 4: Observe que o triângulo é isósceles, portanto a altura irá dividir a base em duas partes iguais. Em seguida, aplique Pitágoras.

Problema 5: trace a altura do trapézio por ambos os vértices da base menor, determinando um retângulo e dois triângulos retângulos. Em seguida, use Pitágoras para calcular os lados restantes e calcule o perímetro.



Problema 6: Trace pelo ponto P as retas perpendiculares aos lados do retângulo. Em seguida, aplique Pitágoras quatro vezes e use o fato de que os lados opostos de um retângulo são iguais (devemos usar esse fato em cada um dos quatro retângulos pequenos que definimos com as retas perpendiculares, não no retângulo grande).



Problema 7: Use o resultado do problema 6.

Problema 8: Observe que a diagonal de um quadrado determina dois triângulos retângulos.

Problema 9: Trace uma diagonal do quadrilátero de modo a determinar dois triângulos retângulos. Em seguida, aplique Pitágoras duas vezes.

6 Gabarito

Problema 4: A altura mede 8.
Problema 5: O perímetro vale $14+17+30+17=78$
Problema 6: Demonstração
Problema 7: $PD=16$
Problema 8: A diagonal vale $\sqrt{2}$
Problema 9: $x=\sqrt{11}$