Matemática - Semelhança e Congruência de Triângulos

André Koga

1 Introdução

Diante de vários problemas de geometria nas olimppíadas científicas de matemática, é importante ter uma base forte para dominar os conteúdos mais avançados. Um tema muito importante, por sua vez, é a semelhança e congruência de triângulos, a qual serve de ponte para outros teoremas e problemas.

Do que se trata? Triângulos, por definição, possuem três ângulos internos e três lados. Ao estudá-los, é possível perceber que algumas propriedades ocorrem de acordo com as medidas dos mesmos, sendo possível correlacionar diferentes triângulos através dessas:

Dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos deles serão idênticos, tendo a seguinte relação quanto aos lados:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Com isso, dois triângulos serão congruentes se, e somente se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 1$$

ou seja,

$$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$$

concluindo que os lados tem mesma medida (note que triângulos congruentes são também semelhantes).

Por sua vez, há diferentes formas de descobrir se dois triângulos são semelhantes, as quais são divididas em casos:

- Caso ângulo-ângulo-ângulo (ou AAA) como já foi explicado anteriormente, em que os ângulos internos são congruentes. Por exemplo, todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois eles têm os ângulos internos idênticos.

- Caso lado-ângulo-lado (ou LAL), em que os dois triângulos possuem um ângulo congruente, e os lados adjacentes a esse ângulo são proporcionais.

- Caso lado-lado-lado (ou LLL), o qual os três lados são proporcionais.

Por fim, os casos de congruência são os mesmo que os casos de semelhança, mas nesses temos ao menos dois lados dos dois triângulos que tem mesma medida.

2 Exemplos

1- Considerando que João tem 1,70m de altura e em determinado momento do dia sua sombra tem 3,40m de comprimento no chão, qual seria a altura de um poste próximo de João cuja sombra tem 6,8m de comprimento nesse mesmo momento do dia?

Solução: Note que as sombras foram medidas no mesmo momento, o que significa que os triângulos formados por João e sua sombra, e o poste e sua sombra são semelhantes, já que os ângulos internos desses triângulos são iguais. Ou seja, se nomearmos as alturas H e H' para João e o poste, respectivamente, e S, S' para as sombras dos mesmos, temos que:

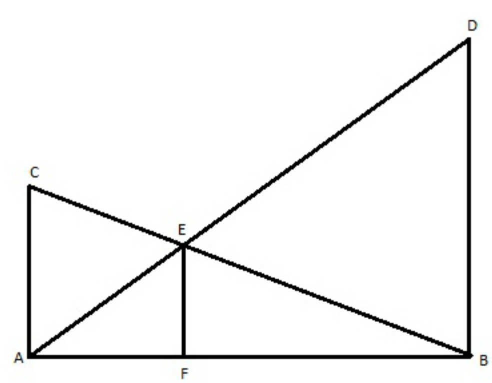
$$\frac{H}{H'} = \frac{S}{S'}$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{1,70}{H'} = \frac{3,40}{6,80}$$

Resolvendo a equação temos que H' = 3,40m. Ou seja, o poste tem 3,40m de altura.

2- O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Solução: Como CA, EF e DB são retas paralelas, temos que os triângulos ABC e FBE são semelhantes, assim como os triângulos DBA e EFA. Denote AF = x, FB = y e EF = h. Assim:

$$\frac{4}{x+y} = \frac{h}{y}$$

pela semelhança de ABC e FBE, e

$$\frac{6}{x+y} = \frac{h}{x}$$

pela semelhança de DBA e EFA. Assim, de ambas obtemos

$$h = \frac{4y}{x+y} = \frac{6x}{x+y}$$

$$4y = 6x$$

Substituindo y na equação inicial temos

$$\frac{4}{x+\frac{6x}{4}} = \frac{h}{\frac{6x}{4}}$$

Desenvolvendo chegamos a

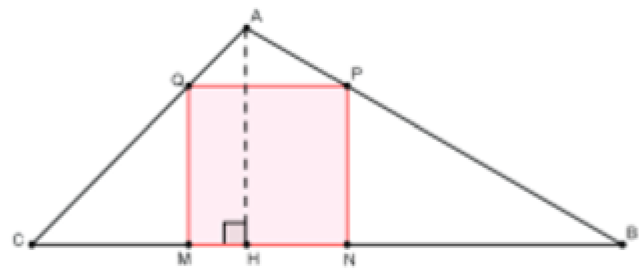
$$\frac{4}{10x} = \frac{h}{6x}$$

ou seja, h = 2,4.

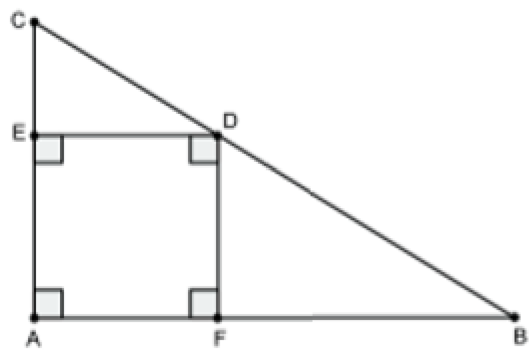
3 Problemas

3- (OBMEP) Determine x na gura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.

4- (OBMEP) Na gura abaixo, BC = 12cm e AH = 8cm, sendo AH altura do ABC. Determine o lado do quadrado MNPQ.



5- (OBMEP) Na gura abaixo, temos AC = 4 e AB = 6. Determine o perímetro do quadrado AEDF.



4 Dicas

3- Note que existem dois triângulos retângulos na figura que são semelhantes. Tente usá-los!

4- O triângulo PBN é semelhante ao triângulo APH, e o triângulo QCM é semelhante ao triângulo ACH, tente usar essas informações

5- Assim como no problema anterior, temos os triângulos semelhantes BDF e DCE. Basta descobrir o lado do quadrado e multiplicar por quatro para conseguir o perímetro