# Divisibilidade e Restos

Caio Hermano Maia


# 1 Introdução

Neste material iremos introduzi-lo à Teoria dos Números, uma área da matemática focada exclusivamente no estudo dos números inteiros e suas diversas propriedades. Esta é uma área muito ampla da matemática e, infelizmente, uma das menos abordadas nos Ensino Fundamental e Médio, mas muito cobrada em diversos níveis nas Olimpíadas de Matemática. Sua importância vai muito além da resolução de meros problemas teóricos, as descobertas na Teoria dos Números atualmente são importantíssimas nas áreas de Computação e Criptografia.

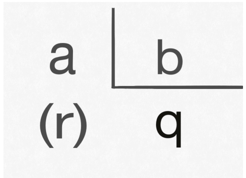
Antes de começar nossos estudos acerca de Teoria dos Números, é essencial definir algumas notações que representam o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, dos inteiros não-negativos $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos inteiros não-positivos $\mathbb{Z}_- = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}$ e o conjunto dos inteiros negativos $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$. Além disso, quando $x$ é um número pertence a um conjunto $A$ e $y$ é um número não pertencente a $A$, denotamos $x \in A$ e $y \notin A$ (lê-se "$x$ pertence à $A$" e "$y$" não pertence à $A$"). Assim, por exemplo, é verdade que $3 \in \mathbb{Z}_+^*$, mas $3 \notin \mathbb{Z}_-$ e $3 \notin \mathbb{Z}_-^*$. E lembre-se sempre de tentar resolver os problemas antes de ler as soluções!

# 2 Algoritmo da Divisão

É claro que a divisão de dois números inteiros nem sempre resulta em outro número inteiro. Entretanto, dados dois inteiros $a$ e $b > 0$, sempre podemos "somar vários $b$`s" até cobrir total ou parcialmente o número $a$. Note que existe um "resto" nessa operação que varia de 0 a $(b - 1)$, pois se houvesse mais $b$ unidades acrescentaríamos "mais um $b$". Vamos formalizar essa ideia!

**Algoritmo da divisão:** Dados um inteiro $a$ (*dividendo*) e um inteiro positivo $b$ (*divisor*), existem dois únicos inteiros $q$ (*quociente*) e $r$ (*resto*) tais que: $a = b \cdot q + r$ e $0 \leq r < b$.

*Exemplos*: (i) $10 = 3 \cdot 3 + 1$, $0 \leq 1 < 3$;
(ii) $76 = 8 \cdot 9 + 4$; $0 \leq 4 < 8$;
(iii) $44 = 11 \cdot 4 + 0$; $0 \leq 0 < 11$;
(iv) $-10 = 3 \cdot (-4) + 2$; $0 \leq 2 < 3$;
(v) $-20 = 4 \cdot (-5) + 0$; $0 \leq 0 < 4$.




OBS: Dependendo do problema, também podemos usar que $b = \dfrac{a-r}{q}$ ou, até mesmo, $q = \dfrac{a-r}{b}$.

## Problemas resolvidos

**Problema 1)** Ache todos os inteiros $n$ tais que o seu resto na divisão por 9 é o dobro do seu quociente.
***Solução***: Pelo algoritmo da divisão, podemos escrever $n$ como $n = 9q + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < 9$. Pelo enunciado, devemos ter $r = 2q \Rightarrow n = 9q + 2q = 11q$, mas $0 \leq 2q < 9 \Rightarrow 0 \leq q \leq 4$. Logo, os valores de $n$ procurados são 0, 11, 22, 33, 44 ■

**Problema 2)** Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois some 1, se o cartão for verde; some 2, se o cartão for amarelo; some 3, se o cartão for azul; some 4, se o cartão for vermelho. Diga-me o resultado final é eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu".

**a)** Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?
***Sol.:*** Ele terá de dizer o número $5 \cdot (2 \cdot 3 + 3) + 4 = 5 \cdot 9 + 4 = 49$.

**b)** Mariazinha disse "Sessenta e seis" para o matemágico. Qual o número é a cor do cartão que ela escolheu?
***Sol.:*** Se $x$ foi o número do cartão dela, então: $66 = 5(2x + 3) + k$, onde $k \in \{1,2,3,4\}$. Daí, $k$ é o resto de 61 na divisão por 5 e $(2x + 3)$ é o quociente, mas como $66 = 5 \cdot 13 + 1 \Rightarrow k = 1$ e $2x + 3 = 13 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$. Portanto, sua carta era um 5 verde.

**c)** Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pode saber disso.
***Sol.:*** Assim como no item anterior, se chamarmos de $x$ o número de sua carta, $(2x + 3)$ deve ser o quociente de 61 na divisão pro 5, mas $61 = 5 \cdot 12 + 1 \Rightarrow 2x + 3 = 12 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4{,}5$, um absurdo! Daí, Pedrinho não poderia ter achado 61 como resultado■

**(OBMEP/2010)**

***Problema 3)*** Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro

lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.
Indicando por $A(d)$ e $B(d)$, respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer $d$ centímetros, temos $A(15) = 8$, $B(15) = 3$, $A(16) = 2$e $B(16) = 4$. Encontre o maior número $d$ tal que $B(d) = A(d)$. **(OBMEP/2013)**

***<u>Solução</u>***: Observe que Adonis vai andar um múltiplo de 8cm mais um número de 0 a 7 (pois ele vai pular 8 até não houver mais 8 para ele pular), assim como Basílio vai andar um múltiplo de 7cm mais um número variando de 0 a 6. Portanto, caso $d = 8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2,\ q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1 < 8,\ 0 \leq r_2 < 7\ \Rightarrow A(d) = q_1 + r_1$ e $B(d) = q_2 + r_2$. Daí:
$$A(d) = B(d) \Leftrightarrow q_1 + r_1 = q_2 + r_2 \Leftrightarrow \frac{d - r_1}{8} + r_1 = \frac{d - r_2}{7} + r_2 \Leftrightarrow 7d - 7r_1 + 56r_1 = 8d - 8r_2$$
$+56r_2 \Leftrightarrow 7d + 49r_1 = 8d + 56r_2 \Leftrightarrow d = 49r_1 - 56r_2$, mas $0 \leq r_1 \leq 7$, $0 \leq r_2 \leq 6$. Então, temos que: $d \leq 49 \cdot 7 - 48 \cdot 0 = 343 \Rightarrow d \leq 343$ e, de fato, $A(343) = B(343) = 49$ ■

# 3 Divisibilidade

Agora falemos de divisibilidade. Muitas vezes, ao nos deparar com problemas envolvendo números inteiros, temos de verificar se um número divide outro ou encontrar o resto que um número deixa na divisão por outro. Mas o que significa, de verdade, divisibilidade? Vamos definir!

**Definição:** Dizemos que um número inteiro $a$ é *divisível* por um número inteiro $b$ se, é somente se, existe um inteiro $c$ tal que $a = b \cdot c$, isto é, quando o resto na divisão de $a$ por $b$ é igual a 0. Também dizemos que $b$ divide $a$, $a$ é múltiplo de $b$ ou $b$ é fator de $a$, todas essas expressões são equivalentes.

**Notação:** *b divide a* $\Leftrightarrow b | a$ e *b não divide a* $\Leftrightarrow b \nmid a$.

*Exemplos*: Temos que $3 | 6$, pois $6 = 3 \cdot 2$, onde 2 é um inteiro; também $9 | -45$, pois $-45 = 9 \cdot (-5)$ e $(-5) \in \mathbb{Z}$; $-7 \nmid 33$, pois não existe inteiro $c$ tal que $33 = -7 \cdot c$ ($\frac{33}{-7} \notin \mathbb{Z}$); e $8 \nmid 73$, pois $\frac{73}{8} \notin \mathbb{Z}$. Vejamos algumas propriedades um tanto úteis acerca de divisibilidades.

## Propriedades

**P1)** Para todo inteiro não-nulo vale: $1 | a$ e $a | 0$.
*<u>Prova</u>:* Temos que, para todo inteiro $a$, $a = a \cdot 1$ e $0 = a \cdot 0 \Rightarrow 1 | a$ e $a | 0$ ■

**P2) (Transitividade)** Se $a$, $b$ e $c$ são inteiros tais que $a | b$ e $b | c \Rightarrow a | c$.
*<u>Prova:</u>* Note que: $a | b \Rightarrow b = a \cdot x$, para algum $x \in \mathbb{Z}$, e $b | c \Rightarrow c = b \cdot y$, para algum $y \in \mathbb{Z}$, mas $b = ax \Rightarrow c = (ax)y = a \cdot (xy)$ e $xy \in \mathbb{Z} \Rightarrow c | a$ ■

**P3)** Se $a$ e $d$ são inteiros tais que $d | a$, então $d | ax$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.
*<u>Prova:</u>* Se $d | a \Rightarrow a = b \cdot d,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow ax = (bx) \cdot d,\ bx \in \mathbb{Z} \Rightarrow d | ax$ ■

**P4)** Se $a$, $b$ e $d$ são inteiros tais que $d \mid a$ e $d \mid b$ então $d \mid ax + by$, para quaisquer inteiros $x$ e $y$.

*Prova:* Como $d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow a = xr$ e $b = ds$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Assim: $ax + by = (dr) \cdot x + (ds) \cdot y = d \cdot (rx + sy) \Rightarrow d \mid ax + by$ ■

OBS$_1$: Chamamos a expressão $(ax + by)$, onde $a$ e $b$ estão fixos, de uma combinação linear dos números $a$ e $b$.
OBS$_2$: Em particular, fazendo $x = 1$ e $y = \pm 1$, obtemos que: se $d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow d \mid a + b$ e $d \mid a - b$.

**P5)** Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$ são números tais que $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.
*Prova:* Note que: $b = ax$ e $d = cy$, $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow bd = (ac) \cdot (xy) \Rightarrow ac \mid bd$ ■

**P6)** Se $a, b, x \in \mathbb{Z}^*$, então vale: $bx \mid ax \Leftrightarrow b \mid a$.
*Prova:* Temos que: $ax \mid by \Leftrightarrow \dfrac{ax}{bx} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$ ■

**P7)** Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $a \mid bc$. Logo, $a \mid c$.

**P8)** Se $a, b \in \mathbb{Z}^*$ são tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$, $a \mid n$ e $b \mid n$. Então, $ab \mid n$.
*Prova:* Como $\begin{cases} a \mid n \Rightarrow n = ax,\ x \in \mathbb{Z} \\ b \mid n \Rightarrow n = by,\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ax = by \Rightarrow b \mid ax$, mas $a$ e $b$ são primos entre si, pela **P7)** temos $b \mid x \Rightarrow x = bz$, para algum $z \in \mathbb{Z}$. Logo, $n = ax = a(bz) = (ab)z \Rightarrow ab \mid n$ ■

**Lembrete:** Para quaisquer números $a$ e $b$ temos que, para $n \in \mathbb{Z}_*^+$, vale a seguinte relação: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$. Isso será útil na prova da **P9)**.
*Prova*: Abrindo às contas, obtemos que: $(a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}) =$
$= a^nb^0 + a^{n-1}b^1 + \ldots + a^2b^{n-2} + a^1b^{n-1} - (a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^1b^{n-1} + a^0b^n) =$
$= a^nb^0 + (a^{n-1}b^1 + \ldots + a^2b^{n-2} + a^1b^{n-1}) - (a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^1b^{n-1}) - a^0b^n =$
$= a^nb^0 + 0 - a^0b^n = a^n - b^n$ ■

OBS: A expressão $(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$ é muito conhecida no meio olímpico e, comumente, chamamos ela de *Blocão,* pois é muito feia e grande. Note ainda que, se $a$ e $b$ são inteiros, o *Blocão* é um inteiro, isso implica que $a - b \mid a^n - b^n$, para todos inteiros $a$ e $b$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

**P9)** Se $a, b, d \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$ são tais que: $d \mid a - b \Rightarrow d \mid a^n - b^n$.
*Prova:* Se $d \mid a - b$, como $a - b \mid a^n - b^n$, pela **P2)**, temos que: $d \mid a^n - b^n$ ■

**P10)** Dentre quaisquer $n$ números inteiros consecutivos, há um múltiplo de $n$
*Prova*: Sejam $x$, $x + 1$, $x + 2$, $\ldots$, $x + (n - 1)$ números inteiros consecutivos. Pelo algoritmo da divisão, $x$ pode ser escrito como $x = kn + r$, $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$. Se $r = 0$, então o problema acabou pois temos que $x$ é múltiplo de $n$ na lista. Agora, caso $r \geq 1$, temos que o número $x + (n - r) = kn + r + n - r = n(k + 1)$ é um múltiplo de $n$ e está na lista, pois $(n - r)$ varia de 1 a $(n - 1)$ ■

## Problemas resolvidos

**Problema 4)** Ache todos os inteiros não-negativos tais que $\dfrac{5n+4}{2n+1}$ é um inteiro positivo.

***Solução***: Observe que: $\begin{cases} 2n+1 \mid 5n+4 \Rightarrow 2n+1 \mid 10n+8 = (5n+4)\cdot 2 \\ 2n+1 \mid 2n+1 \Rightarrow 2n+1 \mid 10n+5 = (2n+1)\cdot 5 \end{cases}$; daí, temos: $2n+1 \mid (10n+8)-(10n+5) = 3 \Rightarrow 2n+1 = \pm 1, \pm 3 \Rightarrow n = -2, -1, 0, 1$. Mas, como o enunciado quer apenas os inteiros não-negativos, as soluções do problema são $n = 0$ ou $1$ ■

**Problema 5)** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, prove que $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$.

***Solução:*** Note que, pela **P3)** e **P4)**: $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid 50a + 5b = 5 \cdot (10a + b) \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b = (50a + 5b) - (49a + 7b)$, pois $7 \mid 49a + 7b = 7 \cdot (7a + b)$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ ■

**Problema 6)** Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Explique por que, para qualquer número que Júlia escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6. **(OBMEP/2017)**

***Solução:*** Queremos provar que $x^3 - x$ é múltiplo de 6, para todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$. Entretanto, note que $A = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1) = (x-1)x(x+1)$. Mas, dentre quaisquer 3 inteiros consecutivos há um múltiplo de 3, então um entre $(x-1), x$ ou $(x+1)$ é múltiplo de $3 \Rightarrow 3 \mid A$. Além disso, dentre 2 inteiros consecutivos há um múltiplo de 2, então um dentre $x, (x+1)$ é par $\Rightarrow 2 \mid A$. Portanto, $6 \mid x^3 - x$ ■

# 4 Critérios de Divisibilidade

Para facilitar o trabalho com números "pequenos", há algumas regras específicas para verificar se um número é divisível por eles. Vejamos algumas delas: (Por conveniência, trabalhemos sempre com o número $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ que, pelo Sistema Decimal, pode ser decomposto como $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0$)

**Divisibilidade por 2:** Um número é divisível por 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

*Prova:* Observe que $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 10 \cdot (10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \ldots + 10^0 a_1) + a_0$, mas $2 \mid 10 \Rightarrow 2 \mid 10 \cdot (10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \ldots + 10^0 a_1)$, pela **P3)**. Logo, $2 \mid x \Leftrightarrow 2 \mid a_0 \Leftrightarrow$ O algarismo das unidades de $x$ é par ■

**Divisibilidade por 3:** Um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos algarismos dele é múltiplo de 3.

*Prova:* Note que $3 \mid 10 - 1$, pela **P7)**, $3 \mid 10^k - 1^k = 10^k - 1 \Rightarrow 3 \mid 10^k a_k - a_k$ pela **P3)**, daí $3 \mid (10^n a_n - a_n) + (10^{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + (10^1 a_1 - a_1) + (10^0 a_0 - a_0) =$
$(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0) - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = x - s(x)$ onde $s(x)$ representa a soma dos algarismos de $x$. Portanto, $3 \mid x \Leftrightarrow 3 \mid s(x)$ ■

**Divisibilidade por 4:** Um número é divisível por 4 se, e somente se, o número formado pelos dois últimos algarismos dele é divisível por 4.

*Prova:* Observe que $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 100 \cdot (10^{n-2}a_n + 10^{n-3}a_{n-1} + \ldots + 10^0 a_2)$ $+10a_1 + a_0$, mas sabemos que: $4 \mid 100 \Rightarrow 4 \mid 100 \cdot (10^{n-2}a_n + 10^{n-3}a_{n-1} + \ldots + 10^0 a_2)$, pela **P3)**. Daí, $4 \mid x \Leftrightarrow 4 \mid 10a_1 + a_0 = \overline{a_1 a_0}$, que é o número formado pelos dois últimos algarismos de $x$ ■

**Divisibilidade por 5:** Um número é divisível por 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é 0 ou 5

*Prova:* Note que $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 10 \cdot (10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \ldots + 10^0 a_1) + a_0$, entretanto temos: $5 \mid 10 \Rightarrow 5 \mid = 10 \cdot (10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \ldots + a_1)$ , pela **P3)**. Logo, $5 \mid x \Leftrightarrow 5 \mid a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ ou $5 \Leftrightarrow$ O algarismo das unidades do número $x$ é igual a 0 ou 5 ■

**Divisibilidade por 6:** Um número é divisível por 6 se, e somente se, é divisível por 2 e 3.

*Prova:* Percebendo que $\text{mdc}(2,\ 3) = 1$, essa propriedade se torna óbvia pela **P8)**.

**Divisibilidade por 8:** Um número é divisível por 8 se, e somente se, o número formado pelos três últimos algarismos dele é divisível por 8.

Prova: É possível observar que: $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 1000 \cdot (10^{n-3}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} +$ $\ldots + 10^0 a_3) + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$, entretanto temos: $8 \mid 1000 \Rightarrow 8 \mid 1000 \cdot (10^{n-2}a_n + 10^{n-3}a_{n-1}$ $+ \ldots + 10^0 a_3)$, pela **P3)**. Daí, $8 \mid x \Leftrightarrow 8 \mid 100a_2 + 10a_1 + a_0 = \overline{a_2 a_1 a_0}$, que é o número formado pelos três últimos algarismos de $x$ ■

**Divisibilidade por 9:** Um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

*Prova:* Note que $9 \mid 10 - 1$, pela **P7)**, $9 \mid 10^k - 1^k = 10^k - 1 \Rightarrow 9 \mid 10^k a_k - a_k$ pela **P3)**, daí $9 \mid (10^n a_n - a_n) + (10^{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + (10^1 a_1 - a_1) + (10^0 a_0 - a_0) =$ $(10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0) - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = x - s(x)$ onde $s(x)$ representa a soma dos algarismos de $x$. Portanto, $9 \mid x \Leftrightarrow 9 \mid s(x)$ ■

**Divisibilidade por 10:** Um número é divisível por 10 se, somente se, o seu algarismo das unidades é 0.

*Prova:* Sabemos que $10 \mid x \Leftrightarrow 2 \mid x$ e $5 \mid x \Leftrightarrow a_0 = 0$ ou 5 e $a_0$ é par $\Leftrightarrow a_0 = 0 \Leftrightarrow$ O último algarismo de $x$ é 0 ■

**Divisibilidade por 11:** Um número é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos seus algarismos de ordem ímpar e a soma dos seus algarismos de ordem par é divisível por 11.

*Prova:* Primeiramente, podemos observar que: $11 \mid 10^2 - 1 \Rightarrow 11 \mid (10^2)^k - 1^k = 10^{2k} - 1$ e $11 \mid 10^{2k+1} - 10 \Rightarrow 11 \mid 10^{2k+1} + 1 = (10^{2k+1} - 10) + 11$. Assim, obtemos que: $11 \mid 10^{2k}a_{2k} - a_{2k}$ e $11 \mid 10^{2k+1}a_{2k+1} + a_{2k+1}$. Portanto, obtemos que: $11 \mid [(10^0 a_0 - a_0) + (10^2 a_2 - a_2) + \ldots] +$ $[(10^1 a_1 + a_1) + (10^3 a_3 + a_3) + \ldots] = [10^0 a_0 + 10^1 a_1 + \ldots 10^n a_n] - [(a_1 + a_3 + \ldots)$ $-(a_0 + a_2 + \ldots)] \Rightarrow 11 \mid x + [$(*Soma dos algarismos de ordem ímpar*) $-$ (*Soma dos algarismos de ordem par*)]. Logo, $11 \mid x \Leftrightarrow 11 \mid$ (*Soma dos algarismos de ordem ímpar*)$-$(*Soma dos algarismos de ordem par*) ■

### Problemas resolvidos

**Problema 7)** O *múltiplo irado* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como o de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

**a)** Qual o múltiplo irado de 20?
***Sol:*** Analisando os primeiros múltiplos de 20 ($M(20) = 20, 40, 60, 80, 100, \ldots$), achamos facilmente que 100 é o múltiplo irado de 20.

**b)** Qual o múltiplo irado de 9?
***Sol:*** Sabemos que para um número ser múltiplo de 9, a soma dos seus dígitos deve ser múltiplo de 9, em especial maior ou igual a 9, então, como os dígitos do múltiplo irado só podem ser 0 ou 1, devemos ter ao menos 9 algarismos iguais a 1 para que a soma dos algarismos do número seja múltiplo de 9. Portanto, o múltiplo irado de 9 é 111111111.

**c)** Qual o múltiplo irado de 45?
***Sol:*** Um número é múltiplo de 45 se, somente se, é múltiplo de 5 e de 9. Assim, o último algarismo desse múltiplo irado deve ser 0 (uma vez que não pode ser 5) e o número deve ter ao menos 9 algarismos iguais a 1 (para que a soma dos algarismos do número seja múltiplo de 9). Assim, o múltiplo irado de 45 é 1111111110.

**d)** Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?
***Sol:*** Analisemos os divisores do número $1110 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$. Note que $D(1110) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 37, 74, 111, 185, 222, 370, 555, 1110\}$, queremos o menor deles tal que o seu múltiplo irado é o 1110. **(OBMEP/2011)**

# 5 Alguns fatos úteis

***Fato 1:*** Para descobrir quantos múltiplos de $x$ há dentre os números $1, 2, 3, \ldots, n$, basta calcular o quociente da divisão de $n$ por $x$

Prova: Escrevendo $n = qx + r$, $q, r \in \mathbb{Z}_+$ e $0 \leq r < x$, observe que o maior múltiplo de $x$ que não ultrapassa $n$ é o $qx$, pois $(q+1)x = qx + x > qx + r = n$, daí os múltiplos de $x$ dentre os números $1, 2, 3, \ldots, n$ são $x, 2x, 3x, \ldots, qx$, que contabilizam exatamente $q$ múltiplos ■

***Fato 2:*** Se ao fatorar um número $n$ em primos os expoentes obtidos são $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, então $n$ possui $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ divisores.

Prova: Observe que todo divisor de n tem os mesmos fatores primos que $n$ só que com expoentes menores ou iguais que no próprio $n$. Assim, para construir um divisor qualquer $d$ de $n$ basta escolher quais os expoentes em que os primos de $n$ vão aparecer em $d$, se o primo $p_i$ é o que aparece com expoente $\alpha_i$ em $n$, então ele pode aparecer com expoentes $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha_i$ em $d \Rightarrow$ São $(\alpha_i + 1)$ possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, há $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ divisores de $n$ ■

*<u>Observação:</u>* Um número é quadrado perfeito se, e somente se, todos os seus expoentes são pares e, portanto, teríamos que a quantidade de divisores desse número seria da forma $(2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1)\ldots(2\beta_k + 1)$ que é ímpar. Logo, um número tem um número ímpar de divisores se, e somente se, é um quadrado perfeito.

# 6 Problemas propostos

**Problema 8)** Encontre o maior inteiro positivo $x$ tal que $\dfrac{7x+8}{2x-2}$ é um inteiro.

**Problema 9)** Prove que um quadrado perfeito não pode deixar resto 2 na divisão por 3.

**Problema 10) (OBMEP/2014)** Uma tabela com linhas e colunas numeradas de 1 a 100 foi preenchida da seguinte forma:

- na linha 1, todas as casas foram preenchidas com 1;
- na linha 2, as casas pertencentes a colunas de número par foram preenchidas com 1 e as demais com 0;
- na linha 3, as casas pertencentes a colunas múltiplas de 3 foram preenchidas com 1 e as demais com 0;
- continuando, cada uma das demais casas foi preenchida com 1 nas casas de colunas múltiplas do número correspondente à linha, e com 0 nas demais.

| | | COLUNAS | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | 99 | 100 |
| LINHAS | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... | 1 | 1 |
| | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ... | 0 | 1 |
| | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ... | 1 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ... | 0 | 1 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | ... | 0 | 0 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ |
| | 99 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 1 | 0 |
| | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 |

a) Qual algarismo foi escrito da linha 7 e coluna 21?
b) Qual é a soma dos algarismos da linha 23?
c) Qual é a soma dos algarismos da coluna 98?
d) Em quais colunas a soma dos algarismos é ímpar?

**Problema 11) (OBMEP/2010)** Catarina tem 210 cartões numerados de 1 a 10.
a) Quantos desses cartões tem umbuzeiro que é múltiplo de 3?
b) Quantos desses cartões tem um número par que não é múltiplo de 3?
c) Qual o menor numero de cartões que Catarina deve pegar, ao acaso, para ter certeza de que 2 ou 3 seja divisor comum em pelo menos dois dos cartões selecionados?

## Dicas

- Problema 8: Baseie-se no problema 4 e utilize as propriedades P3) e P4). Lembre-se sempre de testar o resultado obtido para garantir que não houve nenhum erro bobo de conta.
- Problema 9: Sabemos que todo quadrado perfeito é da forma $n^2$, para $n$ inteiro. Dívida a questão em 3 casos de acordo com o resto que $n$ deixa por 3: $n = 3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$; e verifique que em nenhum dos casos $n^2$ deixa resto 2 na divisão por 3.
- Problema 10: Perceba que a soma dos algarismos de uma linha é a quantidade de múltiplos do número associado à linha e que a soma dos algarismos de uma coluna é a quantidade de divisores do número correspondente à coluna. Depois, utilize os Fatos 1 e 2 para terminar o problema.
- Problema 11: Utilize o Fato 1. Note que os números pares e não múltiplos de 3 são aqueles que deixam resto 2 ou 4 por 6 e que. para Catarina ter certeza que pegou duas cartas que possuem um fator 2 ou 3 em comum, devemos calcular a quantidade máxima de números que não possui fatores  ou 3 em comum.

# 6 Fontes

- OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas