Cálculo - Aula 3

Artur Rodrigues

1 Integrais

Olá, queridos estudantes olímpicos. Nos últimos materiais tratamentos da definição de limites, com uma visão um pouco mais superficial da matéria (Já esses conceitos são menos abordados em problemas olímpicos), e na aula 2 analisamos a derivada. Durante o processo, realiza-se uma divisão entre dois termos, sendo estes uma variação muito pequena no eixo y por uma variação muito pequena no eixo x. Veja que a derivada é um processo matemático aplicado à uma função, em que se usa a divisão de dois termos.

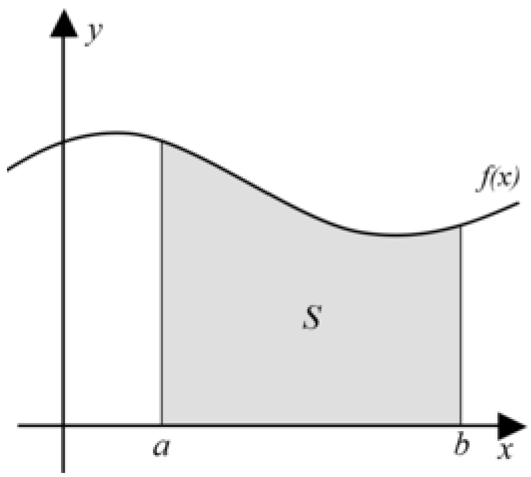

Figura 1

Nesta aula, estudaremos a integral. O conceito de integral, como na imagem acima, é a área S cinza. Qual a utilidade deste processo? Bom, reutilizando do exemplo da aula 1, temos o gráfico de um Movimento Harmônico Simples.

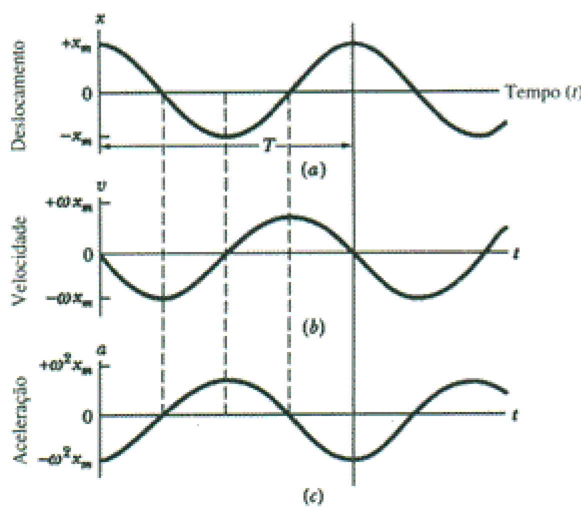

Figura 2

Na figura, temos o gráfico da posição, velocidade e aceleração em função do tempo. Vimos na aula 1 que a derivada do gráfico da posição em função do tempo gera a velocidade em função do tempo. Ou seja, passamos do gráfico 1 para o

2 usando a derivada. A integral é o processo inverso, ou seja, passa do gráfico 2 para o 1. Sendo assim, enquanto a derivada é a divisão dos eixos, a integral é o produto dos eixos, e dai se tira as utilidades do processo matemático, basta saber o significado científico da integral e estuda-las.

Sabendo a utilidade dela, comecemos o processo para saber usar uma integral. O que define o processo para resolver uma integral, devemos usar o Teorema fundamental do cálculo, que diz que, uma função $F(x)$ é derivável e a derivada é a função $f(x)$, temos que:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

Onde C é chamado de constante de integração, e ela é determinada por condições específicas para cada função Fef. F é a função primitiva e f é a função derivada. Porém, qual é a interpretação visual deste processo matemático? Bom, observe a imagem a seguir:

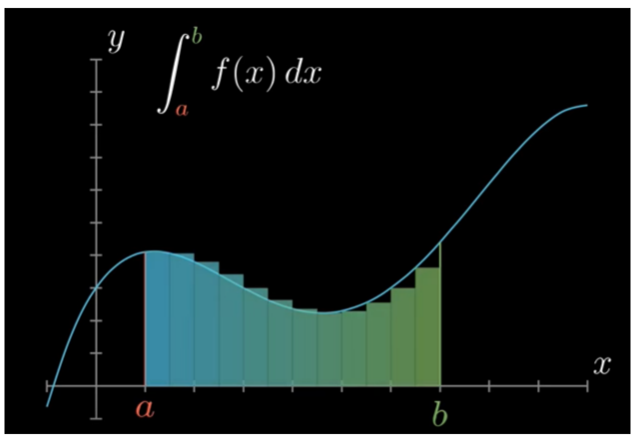

Figura 3

Veja que esse retângulos possuem altura $f(x)$ para cada valor dx. A notação $\int$ determina a soma desses vários retângulos, que, caso a largura deles seja muito pequena, preencherão exatamente a área entre os valores a e b.

Logo, para calcular uma integral, basta você pensar "Bom, eu quero saber a integral dessa função. Que outra função, quando passar pelo processo da derivada, irá dar a função original?". Calma, eu sei que parece meio estranho. Então você não faz uma integral de fato? É, basicamente isso. Você só deve seguir o processo inverso do de uma derivada, chegando na função primitiva.

- Exemplo 1: Analisando a derivada da função polinomial, temos que:

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Veja que, para derivar a função polinomial, estamos multiplicando a função pelo expoente e subtraindo 1 do expoente. Sendo assim, a integral da função deve ser somando 1 no expoente e dividindo a função pelo resultado da soma do expoente e o número 1. Logo:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$
$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- Exemplo 2: Analisando a derivada da função logaritmo natural, temos que:

$$f(x) = lnx$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Logo, para acharmos a integral da função $\frac{1}{x}$, basta fazer o processo inverso. Ou seja, a integral da função $f'(x)$ dará a função primitiva $f(x)$. Ou seja:

$$f(x) = \int f'(x) + C$$
$$\int \frac{1}{x}dx = lnx - C$$

- Exemplo 3: Analisando a derivada da função exponencial, temos que:

$$f(x) = e^{ax}$$
$$f'(x) = ae^{ax}$$

Logo, vemos que o processo é de multiplicar pela constante. Sendo assim, devemos dividir pela constante ao integrar.

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

$$F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

- Exemplo 4: Como as derivadas das funções trigonométricas você percorre o círculo trigonométrico no sentido horário, para integrar estas funções basta percorrer o círculo no sentido anti-horário, ou seja:

$$\int cosxdx = senx + C$$

$$\int senxdx = -cosx + C$$

$$\int -cosxdx = -senx + C$$

$$\int -senxdx = cosx + C$$

  Obs: Veja que eu coloquei C para todas as constantes, mas elas não necessariamente são iguais (Na verdade elas provavelmente serão diferentes).

Veja que essas integrais calculam uma área, porém, não estamos definindo o início e o fim dessa área como na imagem 3, que define o começo da integral (Valor a) até o valo final (Valor b). O que acontece neste processo? Bom, em sua essência, a parte matemática é igual. Após resolver a integral, você irá substituir os valores b e a e subtrair estes valores, ou seja, a constante de integração irá sumir. Veja no exemplo a seguir:

- Calcule a integral da função $f(x) = x^3 + 2x$ do valor de $x = 2$ até $x = 4$.

  Resolução: Seja S o valor da integral nos limites determinados. Fazendo a integral da função mencionada no enunciado, temos que:

$$F(x) = \int (x^3 + 2x)dx + C = \frac{x^4}{4} + x^2 + C$$

  Como queremos nos limites de 2 até 4, teremos que:

$$F(4) = \frac{4^4}{4} + 4^2 + C$$

$$F(2) = \frac{2^4}{4} + 2^2 + C$$

$$S = F(4) - F(2) = (64 + 16 + C) - (4 + 4 + C) = 72$$

- Obs - Outra notação possível para esse tipo de problema é a seguinte:

$$S = \int_2^4 (x^3 + 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_2^4$$

Com isto, terminamos nosso curso de cálculo para iniciantes em olimpíada. A priori, não é necessário o uso de cálculo para resolver questões, porém é interessante entender estes conceitos, pois são fundamentos matemáticos usados na compreensão da ciência, o que pode vir a ser útil para os alunos curiosos. E melhor ainda, é uma boa forma de entrar na faculdade tendo conhecimentos de Cálculo I.