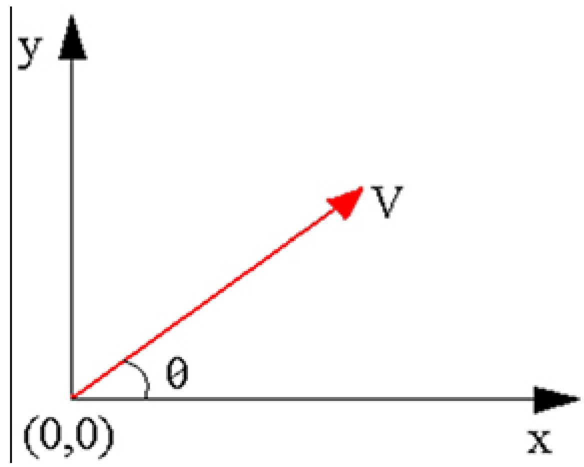
Lançamentos

Artur Rodrigues

1 Movimento Bidimensional

O movimento bidimensional, como o próprio nome diz, trata de analisar a evolução de um movimento que ocorre em um plano ao longo do tempo. Esse tipo de movimento é muito útil para se estudar lançamentos, pois eles não costumam ser perfeitamente horizontais ou perfeitamente verticais. Este tipo de estudo ajuda no lançamento de foguetes, no treinamento de Snipers, entre outras utilidades. Consideraremos um modelo mais simples de um movimento bidimensional, considerando que não existe resistência do ar. Analisaremos também todos os lançamentos sendo feitos na Terra (Isto é, a gravidade atua nos sistemas)

- Plano cartesiano XY: O movimento bidimensional pode ser muito bem analisado em um plano cartesiano xy. Com isto, podemos utilizar estrategias de maneira mais organizada. Definamos o eixo x como o eixo horizontal (Positivo para a direita) e o eixo y como o eixo vertical (Positivo para cima), como na imagem abaixo.



Veja que assim, podemos utilizar um método de análise de movimento bidimensional que analisa este movimento como a junção de dois movimentos unidimensionais. Veja que:

$$r(t) = \sqrt{(y(t))^2 + (x(t))^2}$$

Onde $r(t)$ é a distância do corpo ao centro dos eixos cartesianos. Para a maioria das situações, o movimento no eixo x será independente do movimento no eixo y. Vamos considerar os 3 casos principais.

- Lançamento horizontal: Este movimento, na verdade, é unidimensional (Assim como o próximo movimento), porém, ele serve de base para uma análise final de um lançamento oblíquo. Bom, o dito lançamento horizontal é um movimento uniforme no eixo x. Já foi abordado nos primeiros materiais de cinemática, cuja equação principal é:

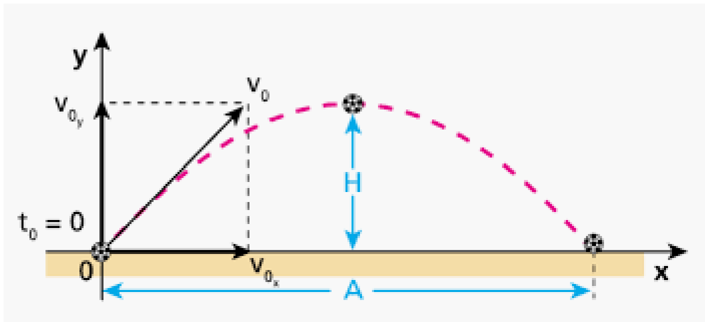
$$x(t) = x_0 + V_{0x}t$$

Onde V_{x_0} é a velocidade inicial do movimento no eixo x.

- Lançamento vertical: O lançamento vertical na Terra possui uma gravidade de $-g$. Logo, na equação do movimento vertical, teremos:

$$y(t) = y_0 + V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

- Lançamento oblíquo: O lançamento oblíquo, de maneira simplificada, é uma mistura de um lançamento vertical e um lançamento horizontal. Considere a situação inicial dada na figura:



Veja que o lançamento possui uma velocidade inicial V, onde podemos decompô-la em $V_{0x} = V cos\theta$ e $V_{0y} = V sen\theta$, onde θ é o ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal. Podemos definir a altura máxima e o alcance do lançamento. Observa-se que, para que o corpo alcance a altura máxima, este deve ter velocidade no eixo y igual a 0, logo:

$$0 = V_{0y} - gt$$

$$t = \frac{V_{0y}}{g}$$

Dai, podemos concluir que a fórmula da altura máxima será:

$$y = y_0 + V_{0y}t - z\frac{gt^2}{2}$$

$$y_{max} = 0 + V_{0y} \times \frac{V_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \times \frac{V_{0y}^2}{g^2}$$

$$y_{max} = H = \frac{V_{0y}^2}{2g}$$

Este resultado também pode ser adquirido usando trabalho da força peso, porém, este tipo de abordagem é vista em dinâmica (Mais especificamente em trabalho e energia). Veja que, como o trajeto da base até o topo da parábola é simétrico ao trajeto do topo da parábola até a outra ponta, temos que o tempo para chegar ao máximo da trajetória é metade do tempo total do lançamento. Ou seja:

$$t_{total} = \frac{2V_{0y}}{g}$$

Dai, podemos achar o alcance do lançamento, marcado como A na imagem.

$$x_{max} = A = V_{0x} \times \frac{2V_{0y}}{g}$$

$$A = \frac{2V_0^2 sen\theta cos\theta}{g}$$

$$A = \frac{V_0^2 sen2\theta}{g}$$

- Equação da Trajetória: Com estas informações, boa parte das questões podem ser resolvidas, porém, existe uma outra abordagem, que é estudar a trajetória da partícula. Para isso, devemos tirar o tempo da jogada, para podermos desenhar todo o caminho da partícula sem que o tempo seja um problema. Veja que, da equação do lançamento horizontal, temos:

  $$t = \frac{x}{V_{0x}}$$

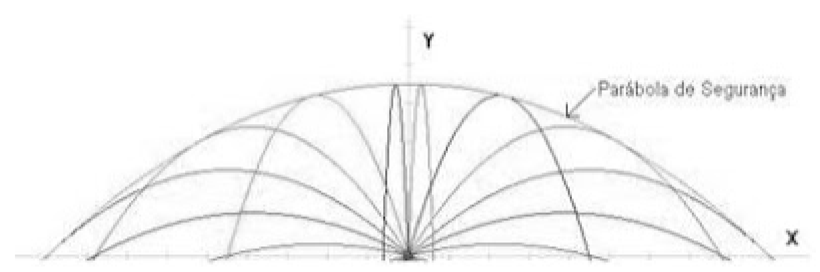
  Logo, podemos substituir esse valor na equação do lançamento horizontal para acharmos a equação da trajetória de uma partícula. Substituindo, temos:

  $$y = V_{0y} \times \frac{x}{V_{0x}} - \frac{g}{2} \times \frac{x^2}{V_{0x}^2}$$

  Dai, substituindo os valores das velocidades em função do ângulo, teremos a equação da trajetória, que é dada como:

  $$y = xtg\theta - \frac{gx^2}{2V_0^2 cos^2\theta}$$

- Parábola de segurança: No estudo da balística, é muito útil saber qual o limite que um corpo pode chegar ao ser lançado com uma velocidade V_0. Isto é, achar uma curva que, se você estiver fora dela, você estará em segurança de não ser atingido. Para isso, utilizaremos a própria equação da trajetória para demonstrarmos a famosa Parábola de Segurança.



Começaremos analisando que o processo teórico se resume em: Achar uma equação em função da variável θ, pois é o ângulo de lançamento que determina a trajetória. Logo, podemos usar a seguinte identidade trigonométrica: $\frac{1}{cos^2\theta} = 1 + tg^2\theta$ Daí, teremos que:

$$y = tg\theta x - \frac{gx^2}{2V_0^2} \times (1 + tg^2\theta)$$

Dai, podemos escrever uma equação de segundo grau cuja variável é a $tg\theta$. Veja que, como estamos nos tratando de uma situação limitante, existirá somente um valor de θ que chega em um ponto da parábola de segurança. Logo, teremos que fazer com que o Δ seja igual a 0.

Dai, teremos que:

$$\frac{gx^2}{2V_0^2} tg^2\theta - xtg\theta + (y + \frac{gx^2}{2V_0^2}) = 0$$

Dai, usando as condições de $\Delta = 0$, teremos:

$$x^2 = 4 \times (\frac{gx^2}{2V_0^2}) \times ((y + \frac{gx^2}{2V_0^2}))$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = y + \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

E assim temos a equação da parábola de segurança. Ela é útil para situações de condições limite. Com estas armas, você poderá conseguir fazer qualquer questão de lançamento bidimensional.