Revisão de Matemática

Artur Rodrigues

1 Recursos matemáticos

Saudações, aluno olímpico. Estamos aqui com mais uma revisão de matemática. Veja que estes conceitos terão muita utilidade em muitas áreas, não somente física e matemática. Nesta parte da revisão iremos estudar proporções, como resolver equações polinomiais, além da Lei dos Senos.

- Proporções: O conceito de proporção é básico, que essencialmente define-se como uma igualdade entre razões. Ou seja, veja que:

$$\frac{120kg}{45kg} = \frac{8}{3}$$

Dai vemos que as proporções dessas razões são iguais. A priori, este conceito não parece se aprofundar demais, porém, ele possui propriedades interessantes. Por exemplo:

- Propriedade 1: Podemos somar os denominadores aos seus respectivos numeradores, formando uma outra proporção. Isto é:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

  O mesmo vale para caso você queira subtrair o denominador de ambas as frações:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

- Propriedade 2:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Estas propriedades podem facilitar o trabalho algébrico de algumas questões.

- Equações polinomiais: Uma equação é um conjunto de duas expressões que são iguais uma a outra (Em geral, possuindo somente uma variável). De forma geral, você poderá ajeitar a expressão para que a equação se torne da forma $f(x) = 0$. Em geral, as estratégias de resolução de equações são conhecidas, porém, iremos dar um pouco de amor para essa sessão com algumas ideias diferentes:

  - Uma equação de primeiro grau, provavelmente a equação mais fácil de se resolver, ela terá o formato $ax + b = 0$ e possuirá somente uma solução. Basta isolar a variável, resultando na resposta.
  - Uma equação de segundo grau possui soluções altamente conhecidas também, que se utiliza da famosa Fórmula de Bhaskara. Ela terá o formato $ax^2 + bx + c = 0$, onde as soluções serão dadas pelas expressões:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pode-se usar também as relações de Girard, que analisa os coeficientes e suas relações com as raízes. Girard descobriu em seus estudos que o produto e a soma das raízes se relacionavam pelas seguintes expressões:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Caso você seja bom de fazer contas, este método pode acabar sendo mais rápido. Por exemplo:

Ache as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Neste problema, veja que a soma das raízes é 3 e o produto das raízes é 2. Um bom chute seria dizer que uma das raízes é 1 e a outra raiz é 2. Como esses dois números satisfazem as relações de Girard, estes números são as raízes.

– Estratégias gerais: Você pode reduzir o grau de um polinômio ao dividir ele por $(x - x_i)$ onde x_i é uma das i raízes do polinômio. Sendo assim, caso você se encontre com uma equação do terceiro grau, basta achar uma raiz que seja mais perceptível para poder reduzir o polinômio para um de segundo grau, e assim conseguir achar todas os valores desejados. Iremos mostrar aqui o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, um procedimento que acelera o processo de divisão polinomial.

Considere o polinômio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$

Considere o valor $x = u$. Dai, podemos utilizar o Dispositivo Prático.

u	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
	a_n	$u \times a_n + a_{n-1}$	...	...	R

Veja que, nesta tabela, o processo do algoritmo é o seguinte:

Primeiramente, você escreve a raiz na primeira linha da tabela, e em seguida você escreve os coeficientes na ordem (LEMBRE-SE DE ESCREVER TODOS, INCLUSIVE OS QUE TEM VALOR 0). Após isso, no espaço da segunda linha e segunda coluna, iremos repetir o valor do coeficiente que acompanha o termo de maior grau (Coeficiente líder). Com essas informações organizadas, começaremos o algoritmo.

Iremos usar a notação b_{ij}, onde i é o valor da linha e j é o valor da coluna desta tabela.

* Passo 1: Multiplique o valor de b_{22} pelo valor da raiz
* Passo 2: Some com o valor do segundo coeficiente da lista b_{13} e coloque este valor na posição b_{13}
* Passo 3: Repita o processo até o último coeficiente ser somado.

Desta forma, no ultimo passo, teremos uma soma com o coeficiente a_0 que resultará no resto da divisão dos polinômio original pelo polinômio $(x-u)$. Caso u seja uma raiz, esse resto deve ser 0.
Os valores que aparecerem na segunda linha serão os coeficientes do novo polinômio, que, se u for uma raíz, terá um grau 1 unidade menor que o polinômio original.

Compreendo que é um dispositivo estranho para se entender pelas definições do próprio, pra um exemplo vai ilustrar bem o que estamos fazendo. Considere o exemplo a seguir:

Exemplo: Considere o polinômio $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x - 1$. Sabendo que uma das raízes da equação é $x = 1$, qual é o polinômio de segundo grau que surge ao dividir $f(x)$ por $x - 1$.

Veja que o enunciado pede pro aluno usar o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini para dividir esses polinômios. Usando o dispositivo, teremos:

1	6	-2	-3	-1
	6	$6 \times 1 + (-2) = 4$	$4 \times 1 - 3 = 1$	$1 \times 1 - 1 = 0$

Ou seja, o polinômio resultante será $g(x) = 6x^2 + 4x + 1 = 0$.

– Achando soluções pra equações polinomiais: Em um polinômio qualquer da forma $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x^1 + a_0 = 0$, as soluções inteiras possíveis são os divisores do termo a_0. Testando estes casos pode ser uma maneira mais fácil de resolver uma equação polinomial. Caso nenhum valor funcione, este polinômio não possui raízes inteiras.

- Lei dos Senos: A lei dos senos é uma relação entre os ângulos de um triângulo e os lados do mesmo. Observe a imagem a seguir:

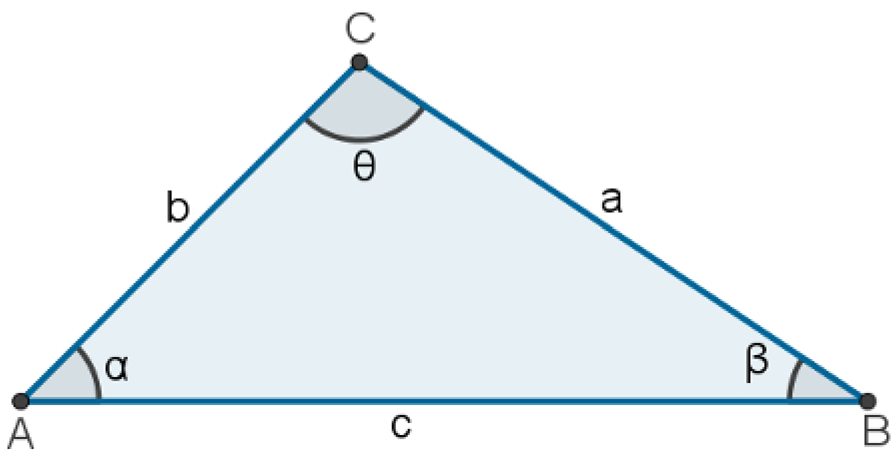

Figura 1

A lei dos senos diz que:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\theta}$$

Caso esteja lendo esse parágrafo, muito bem! Você está caminhando bem em direção ao sucesso em olimpíadas. Essas revisões em matemática serão muito importantes para resolução de questões, e bem, conhecimento nunca é demais. Um bom estudo para você, aluno olímpico.