Dinâmica

Vinícius Ferreira

1 Definição de Momento Linear ou Quantidade de Movimento

Ao longo dos tópicos anteriores, surgiu uma certa grandeza física vetorial que ainda não foi devidamente apresentada, o Momento Linear ou, numa linguagem mais comum no ensino médio, Quantidade de Movimento. Define-se como Momento Linear:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$ = Momento Linear; m= massa do corpo; $\vec{v}$ = velocidade do corpo

Tal grandeza não possui unidade de medida própria usual, apenas kg.m/s no SI (Sistema Internacional) e possui mesma direção e mesmo sentido que o vetor velocidade (amenos que você seja o descobridor da massa negativa). Nota-se, também, que essa grandeza é a mesma que aparece na Segunda Lei de Newton na forma diferencial:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

O que significa que se pode, então, postular que uma Força é definida pela taxa de variação temporal do Momento Linear de um certo corpo.

2 Momento Linear de várias partículas e de seu Centro de Massa(CM)

Caso seja útil calcular o Momento Linear total de um conjunto de massas, basta somar vetorialmente os Momentos de cada massa:

$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Outra grandeza similar, um pouco mais útil, é o Momento Linear do Centro de Massa de um sistema de mais de um corpo, que podemos deduzir a partir da posição do CM:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Derivando em relação ao tempo (divididindo por t, como preferir):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_{CM} = M_{total} \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{p}_{CM}$$

Uma valiosa dica (bizu) referente ao centro de massa é que, em muitos casos, o referencial do centro de massa é bastante privilegiado quando se trata de poupar esforços matemáticos, principalmente em problemas de Momento Linear ao aplicar a conservação do Momento. Portanto, guarde essa informação como uma carta na manga.

3 Teorema do Impulso

Uma outra grandeza vetorial é o Impulso, que se define como o quanto uma força F é aplicada em um certo intervalo de tempo t. De forma simplificada (para forças constantes):

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot t$$

Ou da forma integral geral:

$$\vec{I} = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}t = \Delta\vec{p}$$

Ou seja, o Impulso de uma Força nada mais é que a variação de Momento Linear gerada pela Força (a partir da Segunda Lei de Newton). Determinamos, assim, o Teorema do Impulso. Um interessante adendo a ser mencionado é que, como I é a integral de F no tempo, I também pode ser calculado a partir da área do gráfico F x t, pela definição de integral.

4 Conservação do Momento Linear

É possível demonstrar a que o Momento Linear obedece uma lei de conservação, utilizando as leis de Newton, em um sistema de corpos de massa total invariável livre de forças externas ou em que o impulso das forças externas pode ser desprezado durante o momemnto analisado. Para a demonstração de tal propriedade, será usado o caso de duas massas interagindo apenas entre si:

$$\vec{F}_1 = \tfrac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \text{ e } \vec{F}_2 = \tfrac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}$$

Pela Terceira Lei de Newton:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Por fim, se a derivada da soma dos Momentos (Momento Linear total) é zero, então não há variação, portanto é constante. Apesar de termos usado o caso mais simples como exemplo, o mesmo princípio se aplica para qualquer número de massas e de Forças de interação. Logo, provamos que, dada as condições citadas inicialmente, o Momento Linear total de um sistema se conserva no tempo.

5 Coeficiente de Restituição

Para colisões, define-se uma grandeza escalar e adimensional chamada Coeficiente de Restituição:

$$e = \frac{\left|\vec{I}_{restituicao}\right|}{\left|\vec{I}_{deformacao}\right|} = \frac{\left|\Delta\vec{p}_{depois}\right|}{\left|\Delta\vec{p}_{antes}\right|} = \frac{\left|\vec{v}_{relativa,depois}\right|}{\left|\vec{v}_{relativa,antes}\right|}$$

Sendo essa grandeza igual a 1 em colisôes perfeitamente elásticas e igual a 0 em colisões inelásticas.

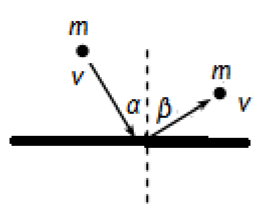
6 Colisões 2D

Colisões unidimensionais (perfeitamente frontais) são bem mais simples, e, gerarlmente não requerem muito além da aplicação da conservação do Momento Linear como visto até aqui. Entretanto, colisões bidimensionais (2D) necessitam de uma atenção especial, por dois motivos:

- Apesar do Momento Linear do sistema se conservar, geralmente, em todas as direções, como se trata de vetores vetores atuando em várias direções diferentes, em geral, deve-se decompor a conservação em dois eixos perpendiculares (geralmente, vertical e horizontal, mas pode haver casos em que haja uma decomposição mais conveniente).

- O Momento Linear individual de cada corpo se conserva na direção perpendicular ao eixo normal da colisão, já que, nesse eixo, não há forças de interação atuando nos corpos.

Exemplo 1:



Uma partícula de massa m e velocidade inicial v, formando um ângulo α com o eixo normal à superfície, colide, tendo um coeficiente de restituição e. Encontre a relação entre as tangentes do ângulo de incidência e do ângulo de saída β.

Solução:

1) Conservando o Momento Linear no eixo perpendicular à colisão (horizontal):

$$mv \cdot sen\alpha = mv' \cdot sen\beta$$

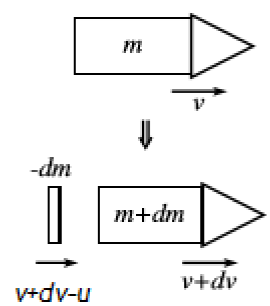
2) Usando a definição de coeficiente de restituição:

$$e = \frac{v_{afastamento}}{v_{aproximacao}} = \frac{v' \cdot cos\beta}{v \cdot cos\alpha} \Rightarrow e \cdot v \cdot cos\alpha = v' \cdot cos\beta$$

3) Dividindo as equações de 1) e 2):

$$e \cdot sen\beta cos\alpha = sen\alpha cos\beta \Rightarrow e \cdot tg\beta = tg\alpha$$

7 Movimento de um Foguete



Nesse exemplo, tem-se um objeto cuja massa varia com o tempo, um foguete. O foguete precisa propelir constantemente combustível para poder se movimentar. Para descobrir a dependência da massa com a velocidade, pode-se assumir que a massa de combustível é ejetada com uma certa velocidade u constante em relação ao foguete. Considere um momento em que o foguete tem massa m velocidade v. Então, dt mais tarde, o foguete tem massa m + dm e velocidade v + dv, enquanto o combustível expelido tem massa (-dm) e velocidade v+dv-u (que pode ser positivo ou negativo, dependendo da magnitude relativa de v+dv e u). Aplicando a conservação do Momento Linear:

$$mv = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) - \mathrm{d}m(v + \mathrm{d}v - u)$$

Depois, aplicando a multiplicação distributiva:

$$0 = mv + \mathrm{d}mu$$

Integrando:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}m}{m} = \int_{0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{u}$$

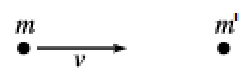
Por fim, chega-se a um conhecido resultado final:

$$v = u \cdot ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

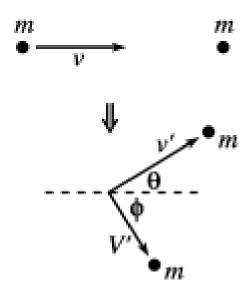
Observação: Tal tópico só se torna relevante a nível olímpico avançado (seletivas e internacionais), universitário ou a título de curiosidade.

8 Problemas

- Uma partícula de massa m e velocidade inicial v, colide frontalmente com uma massa estacionária m', tendo um coeficiente de restitução e. Determine as velocidades de cada partícula após a colisão. O que acontece se as massas forem iguais e a colisão é elástica? E quando é inelástica?

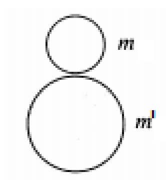


- Uma Uma bola de bilhar com velocidade v se aproxima de uma bola estacionária idêntica. As bolas colidem umas com as outras elasticamente, de modo que a bola que entra é desviada por um ângulo θ. Quais são as velocidades finais das bolas? Qual é o ângulo ϕ em que a estacionária é ejetada?

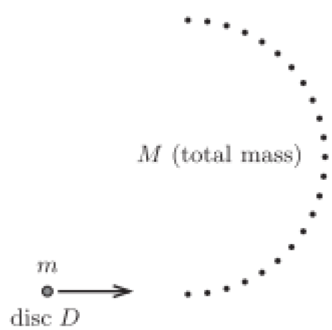


- Imagine agora, a mesma situação da questão anterior, porém com a diferença de que a massa estacionária vale m'. Determine o ângulo máximo de espalhamento de m (maior valor do ângulo θ possível).

- Duas bolas elásticas de massas m e m'são colocadas uma sobre o topo da outra (com um pequeno espaçamento entre elas) são soltas no chão. Qual a razão m/m' para que a bola de cima receba a maior fração da energia cinética possível? Qual será essa razão de massas para quer a bola de cima alcance a maior altura possível?



- (Hardcore) Em uma mesa de air hockey, há N pequenos discos idênticos, igualmente espaçados em torno de um semicírculo; a massa total dos discos é M. Outro disco pequeno, D, de massa m, viajando em uma direção perpendicular ao fechamento diâmetro do semicírculo, atinge o primeiro dos discos estacionários. Por algum milagre, subsequentemente, rebate todos os outros N - 1 discos, após isso, está viajando em uma direção diretamente oposta à de seu movimento inicial. Todos as colisões são perfeitamente elásticas e o atrito é insignificante em toda parte.



  a) No caso limitante de N tendendo ao infinito, qual é o valor mínimo da razão de massa M / m para que tal milagre seja possível?

  b) Quando a razão de massa possui o valor crítico encontrado na parte a), qual é a razão das velocidades final e inicial de D?

OBS: Tente resolver todos os problemas por si só, em breve o solucionário de todos estará disponível no site.