Desigualdades

Julia Melo

1 Introdução

Sabemos que o conceito de desigualdades nem sempre é comum, sendo assim, um assunto aplicado numa área mais aprofundada da matemática. Portanto, nosso objetivo neste material é apresentar didaticamente tal assunto e suas aplicações em alguns ramos da matemática. Denotaremos então, suas demonstrações e mostraremos também alguns problemas resolvidos e propostos para praticar. Vejamos agora tais desigualdades.

2 Conceitos iniciais

Desigualdade é uma comparação que se designa entre os números reais (sejam estes a e b), utilizando os símbolos da relação de ordem, o qual pode ser verdadeiro ou falso. Por exemplo:

$$a > b;\ a \leq b$$

$$a < b;\ a \geq b$$

2.1 Definições

- Um número $a \in \mathbb{R}_+^*$ é positivo se e somente se $a > 0$.
- Um número $a \in \mathbb{R}_-^*$ é negativo se e somente se $a < 0$.
- Temos $a > b \iff a - b$ é positivo $(a - b > 0)$.
- Temos $a < b \iff a - b$ é negativo $(a - b < 0)$.
- Se $\{a; b\} \in \mathbb{R}_+$ então $\{a + b;\ ab\} \subset \mathbb{R}_+$.
- Teremos $a \geq b \iff a > b \vee a = b$.
- $a < b < c \iff a < b \wedge b < c$.
- $a > b \iff b < a$.

3 Demonstrações

3.1 Desigualdades entre as médias aritmética e geométrica

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos. Logo:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Por consequência da desigualdade $MG \leq MA$:

1. se o produto de n números positivos for constante, a soma será mínima se todos os números forem iguais.

2. se a soma de n números for constante, o produto será máximo quando todos forem iguais.

Para demonstrarmos tal desigualdade, inicialmente, demonstraremos um resultado auxiliar:

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Faremos uma demonstração por indução sobre n.

Para $n = 1$:

Temos que $x_1 = 1$ e, portanto, $x_1 \geq 1$, o que torna o resultado verdadeiro.
Suponhamos então que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k = 1 \iff x_1 + x_2 + ... + x_n \geq k$$

Vamos verificar agora que o resultado é válido para $n = k+1$. Sejam $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Assim, temos dois casos que podem ser apresentados:

1. Todos os números $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ são iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1}$. Como estamos supondo que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ segue que neste caso todos eles têm de ser iguais a 1, e portanto $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = k + 1$. O resultado vale, neste caso, para $n = k + 1$, posto que a igualdade é verificada quando cada um dos números é igual a 1.

2. Nem todos os números são iguais, ou seja, há entre os números um deles que é menor que 1, e um deles que é maior que 1, visto que não podemos ter todos os números menores que 1 nem todos os números maiores que 1, pois o produto entre todos eles deve ser 1. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$. Fazendo $x_1 \cdot x_{k+1} = b_1$, segue que:

   $$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \implies b_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k = 1$$

   Pela hipótese de indução segue que $b_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$. Dessa forma:

   $$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = \underbrace{b_1 + x_2 + ... + x_k}_{\geq k} + x_1 - b_1 + x_{k+1} \geq k + x_1 - b_1 + x_{k+1}$$

Para finalizarmos, devemos verificar que $x_1 - b_1 + x_{k+1} \geq 1$.

De fato, lembrando que $x_1 \cdot x_{k+1} = b_1$, segue que:

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = x_1 - x_1 x_{k+1} + x_{k+1}$$

Logo:

$$\begin{aligned} x_1 - b_1 + x_{k+1} = x_1 - x_1 x_{k+1} + x_{k+1} &= x_1(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 + 1 \\ &= x_1(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) + 1 \\ &= (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1 \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} x_1 < 1 &\implies (x_1 - 1) < 0 \\ x_{k+1} > 1 &\implies (1 - x_{k+1}) < 0 \end{aligned}$$

Segue que $(1 - x_{k+1})(x_1 - 1) > 0$, e portanto,

$$x_1 - b_1 + x_{k+1} = (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) + 1 \geq 1$$

Assim,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + x_1 - b_1 + x_{k+1} \implies x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

como queríamos demonstrar.

Com base neste lema, podemos demonstrar a famosa desigualdade entre as médias aritmética e geométrica de números reais positivos, vejamos:

Seja $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, então

$$1 = \frac{G}{G} = \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}{G} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{G}} \implies \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{G} = 1$$

Como $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{G}$ segue pelo resultado que demonstramos inicialmente que:

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \ldots + \frac{x_n}{G} \geq n \implies x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq nG \implies G \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\implies \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

3.2 Desigualdade entre as médias harmônica e geométrica

Dados os números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, definimos a sua média harmônica como sendo o número $H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$ e como já vimos anteriormente a sua média geométrica como sendo o número $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$. Nessas condições é sempre verdade que $H \leq G$, e que a igualdade ocorre se, e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Para demonstrarmos isso, vamos usar a desigualdade já estabelecida entre as médias aritmética e geométrica para números reais positivos. Se $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais positivos, $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ também o são. Sendo assim, aplicando tal desigualdade:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n} \implies \frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \implies H \leq G$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = ... = \frac{1}{x_n} \implies x_1 = x_2 = ... = x_n$$

Logo, é sempre verdade que $H \leq G \leq A$. A igualdade ocorrendo se e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3.3 Desigualdade entre as médias aritmética e quadrática

Dados os números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, definimos a sua média quadrática como o número $Q = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$ e como já vimos anteriormente, a sua média aritmética é um número $A = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. Desse modo, é sempre verdade que $A \leq Q$, e que a igualdade ocorresse se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Para avaliarmos este fato, usaremos a seguinte identidade: $(a-b)^2 \geq 0 \iff 2ab \leq a^2 + b^2$. Vejamos:

$$A^2 = \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+2x_1x_2+...+2x_{n-1}x_n}{n^2} \leq$$

$$\leq \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+(x_1^2+x_2^2)+...+(x_{n-1}^2+x_n^2)}{n^2}$$

$$= \frac{n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)}{n^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} = Q^2$$

Assim, $A \leq Q$.

Temos então que dados os números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, é sempre verdade que $H \leq G \leq A \leq Q$, a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ números reais, então:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n))^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$$

valendo a igualdade se, e somente se, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$.

Para demonstrar essa igualdade, vamos utilizar o seguinte lema[1], que provaremos em seguida:

Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, e $x, y > 0$, temos que:

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$$

Observação: Esse lema pode ser estendido. Se $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$, então é válida a desigualdade

$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Logo, sabemos que:

$$(ay - bx)^2 \geq 0 \iff a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \implies a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy$$

Adicionando $a^2xy + b^2xy$ a ambos os lados da desigualdade,

$$a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \iff a^2y^2 + a^2xy + b^2xy + b^2x^2 \geq a^2xy + b^2 + 2abxy$$

[1] O lema não tem sua autoria atribuída a ninguém em especial, mas aparece nos livros do professor Titu Andreescu, que é uma referência para olimpíadas de Matemática

$$\iff a^2y(y+x)+b^2x(y+x) \geq xy(a^2+2ab+b^2)$$
$$\iff a^2y(y+x)+b^2x(y+x) \geq xy(a+b)^2$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por $xy(x+y)$, ficamos com:

$$\frac{a^2y(y+x)}{xy(x+y)}+\frac{b^2x(y+x)}{xy(x+y)} \geq \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)}$$

Portanto $\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$. Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $(ay-bx)^2=0 \implies \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$. Podemos aplicar o lema de forma recorrente (ou seja, n vezes), o que nos dá:

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n} \leq \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Voltando à demonstração de Cauchy-Schwarz,

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=\frac{x_1^2\cdot y_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2\cdot y_2^2}{y_2}+...+\frac{x_n^2\cdot y_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2}$$

ou seja,

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geq \frac{(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2}{y_1^2+y_2^2+...+y_n^2}$$

e portanto,

$$(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)$$

3.5 Desigualdade de Bernoulli

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Provaremos o exposto por indução.

Para $n=1$:

$(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ é verdadeira pois $(1+x)^1=1+x$ e evidentemente $1+x \geq 1+x$.

Suponhamos agora que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$, isto é, para $x > -1$,

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

Agora vamos demonstrar que é válida para $n = k+1$ (lembrando que como $x > -1$, segue que $1+x > 0$). Então multiplicaremos ambos os lados da desigualdade por $(1+x)$, sem que seja alterado o sinal da desigualdade. Assim:

$$(1+x)^k \geq 1+kx \Longrightarrow (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Ou seja, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, que verifica que a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

4 Problemas

Problema 1. Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)$, sendo $x \in (0;1)$.

Solução: Como a função apresentada é quadrática, podemos encontrar seu valor máximo através da ordenada do vértice da parábola desde que a abcissa do vértice seja $(0;1)$. Agora, resolvendo pela desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{x+(1-x)}{2} \geq \sqrt{x(1-x)}$$
$$\Longrightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 1-x$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$. Assim, o valor máximo de f é $\frac{1}{4}$.

Problema 2 Dados números positivos arbitrários a, b, c, prove que ao menos uma das seguintes desigualdades é falsa:

$$a(1-b) > \frac{1}{4},\ b(1-c) > \frac{1}{4},\ c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Problema 3. (IMO) Sendo K, L, M pontos sobre os lados BC, CA, AB do $\triangle ABC$, mostre que a área de ao menos um dos triângulos AML, BKM, CLK é

menor que ou igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo ABC.

Solução: Sendo $k,\ l,\ m \in [0;1]$, podemos escrever:

$$BK = ka,\ KC = (1-k)a$$

$$CL = lb,\ LA = (1-l)b$$

$$AM = mc,\ MB = (1-m)c$$

Assim,

$$[AML] = \frac{mc}{2} \cdot (1-l) \cdot b \cdot \sin\angle A$$

$$\implies [AML] = m(1-l) \cdot [ABC]$$

Analogamente,

$$[BKM] = k(1-m) \cdot [ABC]$$

$$[CLK] = l(1-k) \cdot [ABC]$$

Supondo que as três áreas em questão sejam maiores que $\frac{1}{4}$ da área de ABC, o resultado segue pelo problema 2.

Problema 4. (Treinamento Cone Sul) Sejam a e b números reais positivos tais que a+b= 1. Prove que $ab^2 \leq \frac{4}{27}$

Problema 5. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo inscrito em um círculo unitário (ou seja, cujo raio mede 1) e seja P um ponto no perímetro do triângulo. Mostre que

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{32}{27}$$

Problema 6. Prove que se $a,\ b,\ c$ são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2 + b^2 = kc^2$, então $k > \frac{1}{2}$.

Problema 7. Seja x um número real e m um natural, prove que

$$\frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+m-1)}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1} \geq x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}}$$

Problema 8. Sejam $a,\ b,\ c$ são inteiros positivos, prove que

$$(a^2b+b^c+c^2a)(a^c+b^2a+c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$$

Problema 9. Determine o valor máximo da função $f(x) = x^3(1-x)$, sendo $x \in (0;1)$.

Problema 10. Se $x,\ y,\ z$ são números positivos, qual o valor mínimo de

$$(x+y+z) \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)?$$

Problema 11. Encontre o valor máximo da função definida pela Leo

$$f(x,y) = \frac{12(xy-4x-3y)}{x^2y^3}$$

onde x e y são reais positivos.

Problema 12. Se $a_1 > a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, mostre que:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n} + \frac{a_2}{a_3+a_4...+a_n+a_1} + ... + \frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}} > \frac{n}{n-1}$$

Respostas

9. O valor máximo de $f(x)$ é $\frac{27}{81}$.
10. O valor mínimo assumido pela expressão é 9.
11. O valor máximo da função é $\frac{1}{256}$

Bibliografia

- Tópicos de Matemática (IME-ITA-Olimpíadas), de Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.
- Polo Olímpico de Treinamento Intensivo.