GEOMETRIA PROJETIVA

Ramyro Corrêa

1 Introdução

A geometria projetiva é uma ótima ferramenta para resolver diversos problemas de geometria a nível olímpico, principalmente problemas que envolvem muitas intersecções entre retas e muitos pontos nos quais é difícil de trabalharmos. Começemos o artigo com algumas definições e axiomas.

1.1 Axioma

Sejam r, s duas retas no plano projetivo tais que $r \parallel s$. Então, dizemos que $r \cap s = \infty_r = \infty_s$, onde ∞_r é o ponto no infinito da reta r.

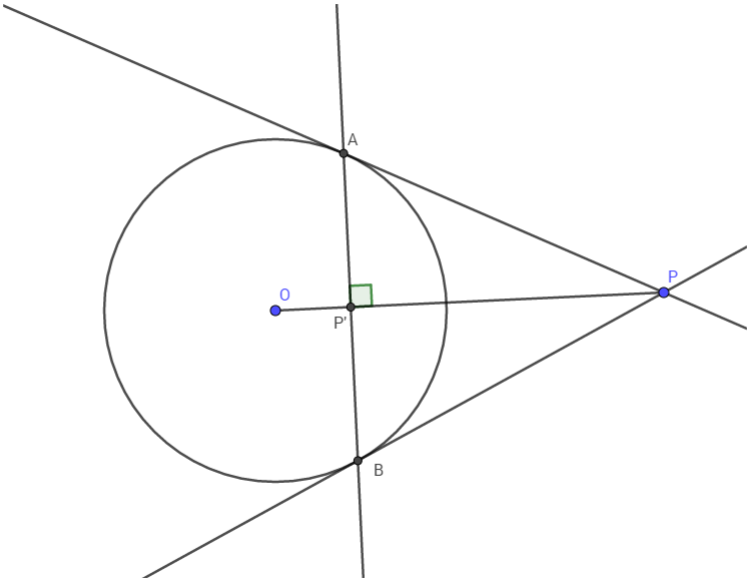
1.2 Definições

1.2.1 Razão cruzada

Sejam A, B, C, D quatro pontos colineares ou concíclicos. Definimos como a razão cruzada de dois pares desses pontos, suponha $(A,B);(C,D)$, denotada por $(A,B;C,D)$, como sendo a razão $\frac{AC.BD}{AD.BC}$.

1.2.2 Polo/Polar

Seja Γ uma cirunferência de centro O e raio r, e P um ponto qualquer no plano. Definimos como a reta polar de P em relação a Γ, denotada por $\Pi_\Gamma(P)$, como sendo a reta perpendicular a OP no ponto P' tal que $OP.OP' = r^2$, i.e., a imagem de P na inversão de centro O que preserva Γ (isso nos diz que os pontos A, B nos quais $\Pi_\Gamma(P)$ corta Γ em A, B são tais que PA, PB tangenciam Γ, se P for exterior a Γ). De modo, similar, dizemos que o polo P de uma reta ℓ, denotado por $\Pi_\Gamma^{-1}(\ell)$, como sendo a imagem de P' na inversão de centro O que preserva Γ, onde P' é o pé da perpendicular a ℓ por O.



1.3 Propriedade fundamental da Razão Cruzada

Teorema: Seja P um ponto no plano, Γ um círculo qualquer passando por P e A,B,C,D pontos colineares. Uma reta ℓ corta PA,PB,PC,PD nos pontos A',B',C',D', respectivamente, e Γ corta PA,PB,PC,PD pela segunda vez nos pontos X,Y,Z,W (dizemos que estamos projetando $(A,B;C,D)$ por P em ℓ e em Γ). Então, temos que $(A,B;C,D) = (A',B';C',D') = (X,Y;Z,W)$.

Prova: Basta aplicar Lei dos Senos nos triângulos $PAC,PAD,PBC,PBD,PA'C'$, $PA'D',PB'C',PB'D'$, obtendo que $(A,B;C,D) = (A',B';C',D')$. Uma inversão de centro P e raio qualquer nos mostra o mesmo para $(X,Y;Z,W)$ já que a imagem de Γ é uma reta que não passa por P.

1.4 Construção da reta polar com régua

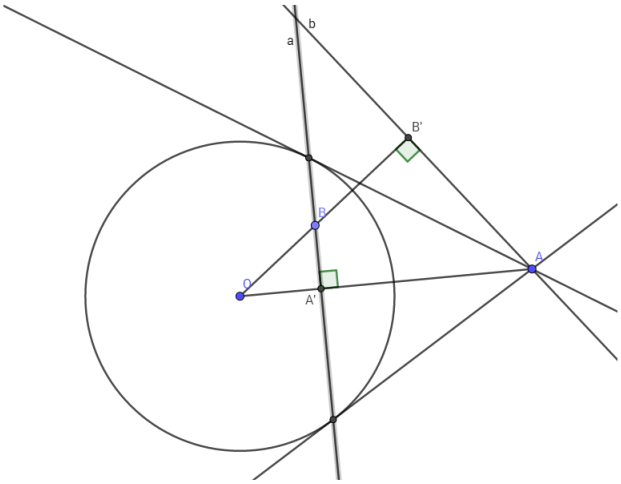
Seja Γ uma circunferência e P um ponto no plano. As retas r,s passam por P e cortam Γ em A,B e C,D, respectivamente, de modo que B está entre A e P, e C está entre D e P. Seja $E = AC \cap BD$ e $F = AD \cap BC$. Então $\Pi_\Gamma(P) = EF$.

Prova: Basta aplicar o Teorema de Pascal nos hexágonos $AACBBD$ e $CCADDB$. Provaremos este teorema posteriormente.

1.5 Teorema de La Hire

Seja Γ uma circunferência e A,B 2 pontos no plano. Então, temos que $A \in \Pi_\Gamma(B) \iff B \in \Pi_\Gamma(A)$.

Prova:



Sejam a, b as retas polares de A, B em relação a Γ. Seja O o centro de Γ e Φ a inversão de centro O que preserva Γ.Denote por $\Phi(X) = X'$ para todo ponto X no plano. Agora, observe que $B \in a \iff AB' \perp OA$ (a reta polar de A relativa a Γ é perpendicular a OA), mas pela inversão, o quadrilátero $AA'BB'$ é cíclico, logo $AB' \perp OA \iff A'B \perp OB \iff A \in b$. Portanto, $A \in b \iff B \in a$, como desejávamos provar.

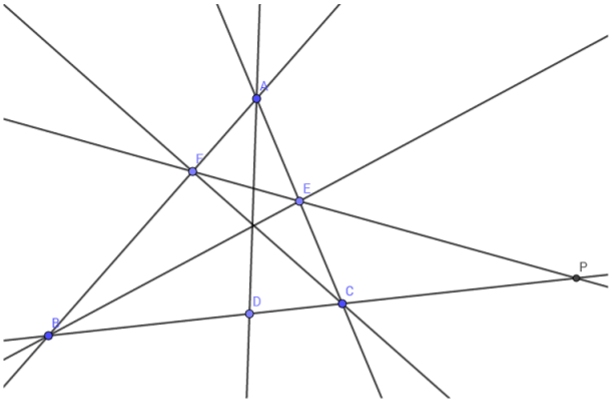
1.5.1 Quádrulpas harmônicas

Quando 4 pontos A, C, B, D estão sobre uma reta, nesta ordem e $(A, B; C, D) = -1$ (aqui utilizamos segmentos orientados), dizemos que os pontos A, B, C, D formam uma quádrupla harmônica, isto é, 4 pontos A, C, B, D colineares nesta ordem tais que $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. Vejamos alguns fatos interessantes a respeito das quádruplas harmônicas:

(i) Construção da quádrupla harmônica com régua

Seja ABC um triângulo e AD, BE, CF 3 cevianas concorrentes, onde $D \in BC, E \in AC, F \in AB$. Então, se $P = EF \cap BC$, $(B,C;D,P) = -1$.

Prova:



Pelo Teorema de Ceva no ΔABC, e pelo Teorema de Menelaus no na reta EFP, temos que: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1 = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FC}$, logo $\frac{DB}{DC} = \frac{PB}{PC}$, como desejado.

(ii) Círculo de Apolônio Sejam A, D e B 3 pontos colineares no plano nesta mesma ordem. Então, o lugar geométrico dos pontos P satisfazendo $\frac{PA}{PB} = \frac{AD}{BD}$ é um círculo cujo diâmetro está na reta BC. Tal círculo é chamado de **Círculo de Apolônio**.

Prova: Tome o conjugado harmônico E de D em relação a BC, isto é, o ponto tal que $(A,B;D,E) = -1$. Então, se P é um ponto satisfazendo $\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB}$, então $\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB}$ (já que $(A,B;D,E) = -1$). Logo, pelo Teorema da Bissetriz

Interna e Externa, temos que PD, PE são as bissetrizes internas e externas de $\angle BPC$, respectivamente. Portanto, $\angle DPE = 90^o$.

Então, os pontos P satisfazendo $\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB}$ estão no círculo de diâmetro DE. Tal círculo é chamado de **Círculo de Apolônio**.

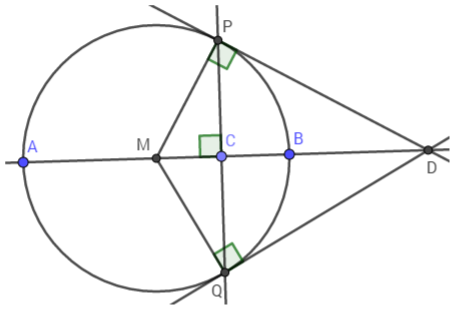
(iii) Quádruplas harmônicas e pontos médios Sejam A, C, B, D pontos colineares nesta mesma ordem. Seja M o ponto médio de AB. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1)$(A, B; C, D) = -1$

2)$MA^2 = MC.MD$

3)$DA.DB = DC.DM$

Prova:

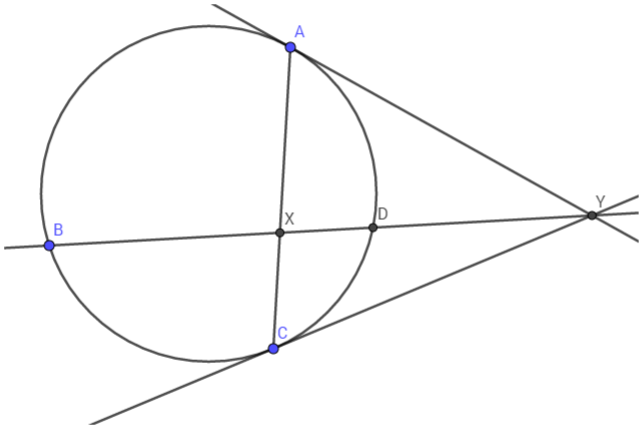


Seja Γ o círculo de diâmetro AB. Pelo primeiro fato, segue que a imagem de C na inversão de centro M que preserva Γ é D e a polar de D em relação a Γ é a reta perpendicular a AB por C. Então, se $\Pi_\Gamma D$ corta Γ em P, Q, temos que $\angle DPM = \angle DQM = 90^o$, e já que $PQ \perp AB$, segue que $DC.DM = DP^2 = DA.DB$, e pela inversão, $MA^2 = MC.MD$. As outras demonstrações são análogas.

(iv) Quadriláteros harmônicos Dizemos que um quadrilátero $ABCD$ é harmônico se, e somente se, ele é cíclico e satisfaz $(A,C;B,D) = -1$.

Teorema: Seja $ABCD$ um quadrilátero harmônico. Então, o ponto de intersecção das tangentes a $(ABCD)$ por A,C é colinear com B,D.

Prova:



Seja $X = AC \cap BD$, $Y_1 = AA \cap BD$, $Y_2 = CC \cap BD$ (se Z pertence a uma circunferência ω a reta ZZ é a tangente a ω por Z). Daí, projetando $(A,C;B,D)$ por A, em BD, temos que $(B,D;X,Y_1) = (B,D;C,A) = -1$. Analogamente, projetando por C, $(A,C;B,D) = (X,Y_2;B,D) = -1$, então $(B,D;X,Y_1) = (B,D;X,Y_2) = -1$, logo $Y_1 = Y_2 = Y$, como desejado.

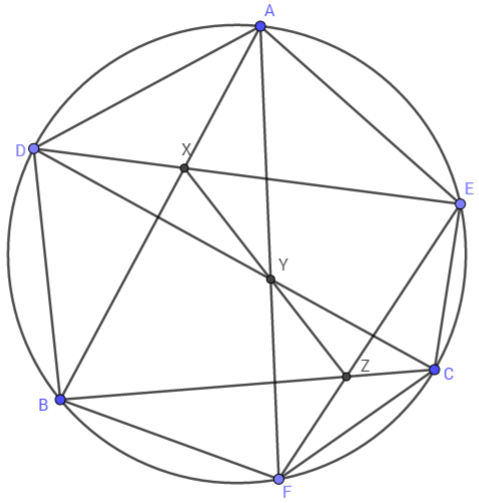
(v) Quádruplas harmônicas e o ponto no infinito Como visto em (i), talvez o leitor se questione de o que acontece se $EF \parallel BC$. Neste caso trabalhamos com o ponto ∞_{BC}, o ponto no infinito da reta BC, e seu conjugado harmônico em relação a BC é o ponto médio D de BC, pelo Teorema de Ceva no nas cevianas AD, BE, CF. Em outras palavras se M é o ponto médio do segmento AB, então $(A,B;M,\infty_{AB}) = -1$, onde ∞_{AB} é o ponto no infinito da reta AB.

2 Teoremas de Pascal, Pappus e Desargues

2.1 Teorema de Pascal

Sejam A, B, C, D, E, F pontos que estão na mesma cônica Γ. Então os pontos $X = AB \cap DE, Y = BC \cap EF, Z = CD \cap FA$ são colineares.

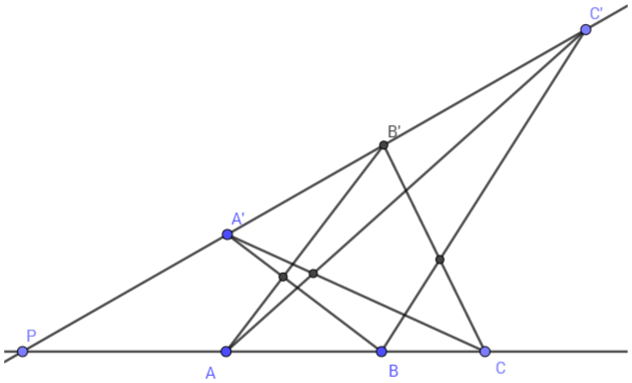
Prova: Considere a transformação projetiva que leva Γ em um círculo. Então, podemos supor sem perda de generalidade que Γ é um círculo.



Agora, perceba que $\angle XAY = \angle ZCF, \angle XDY = \angle ZFC, \angle ZFY = \angle XDA, \angle ZCY =$, ou seja, as cevianas AX, DX seccionam os ângulos $\angle YAD, \angle YDA$ (no ΔDAY) da mesma forma que as cevianas CZ, FZ seccionam os ângulos $\angle YCF, \angle YFC$ (no ΔCYF). Portanto, como ΔDAY ΔFCY, temos que as cevianas YX, YZ seccionam, respectivamente, os ângulos $\angle DYA, \angle FYC$ da mesma forma. Logo, $\angle XYA = \angle ZYF \implies X, Y, Z$ são colineares.

2.2 Teorema de Pappus

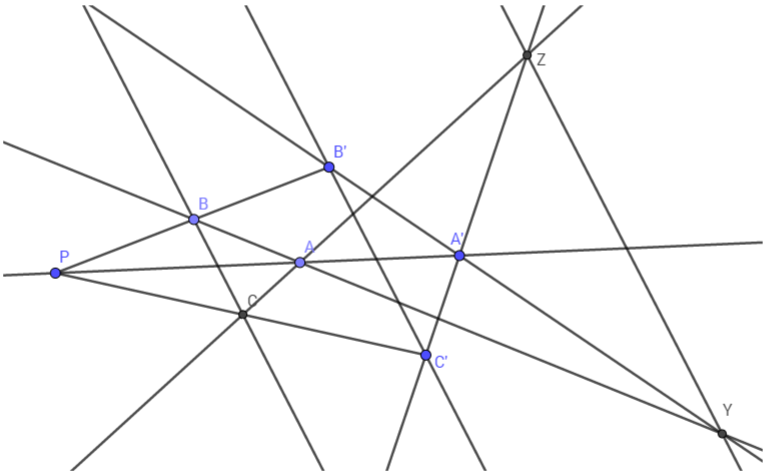
Sejam ℓ_1, ℓ_2 duas retas no plano, e $A, B, C; A', B', C'$ pontos sobre ℓ_1, ℓ_2, respectivamente. Defina $X = AB' \cap A'B, Y = AC' \cap A'C, Z = BC' \cap B'C$. Então X, Y, Z são colineares.



Prova: Seja $P = \ell_1 \cap \ell_2$. Usemos "Moving Points". Fixe ℓ_1, ℓ_2 e mova C' linearmente com $deg(C') = 1$ sobre ℓ_2. Então, $deg(AC'), deg(BC') \leq 1 + 0 = 1 \implies deg(AC' \cap A'C), deg(BC' \cap B'C) \leq 1 + 0 = 1 \implies deg(Y), deg(Z) \leq 1 \implies deg(YZ) \leq deg(Y) + deg(Z) \leq 1 + 1 = 2$. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, é suficiente verificarmos que X, Y, Z são colineares para $2 + 1 = 3$ escolhas de C'. Escolhendo $C' = A', B', P$, o resultado é imediato.

2.3 Teorema de Desargues

Sejam $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ dois triângulos em perspectiva, isto é, dois triângulos tais que AA', BB', CC' concorrem em um único ponto. Defina $X = BC \cap B'C', Y = AB \cap A'B', Z = AC \cap A'C'$. Então X, Y, Z são colineares.



Prova: Considere a transformação projetiva que leva B, C, B', C' em pontos tais que $Im(BC) \parallel Im(B'C')$. Então, podemos supor sem perda de generalidade que $BC \parallel B'C'$. Agora, usemos "Moving Points" novamente. Seja $P = AA' \cap BB' \cap$

CC'. Fixe P,A,B,C,B',C' e mova A' linearmente em PA com $deg(A') = 1$. Então, $deg(A'B'), deg(A'C') \leq 1+0 = 1 \implies deg(A'B' \cap AB), deg(A'C' \cap AC) \leq 1+0 = 1 \implies deg(Y), deg(Z) \leq 1 \implies deg(YZ) \leq 1+1 = 2$. Portanto, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, é suficiente verificarmos que X,Y,Z são colineares para $2+1 = 3$ escolhas de A'. Escolhendo $A' = A,P$, o resultado é imediato. Para finalizar, escolha A' de modo que os triângulos $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ sejam homotéticos. Consequemente, os pontos X,Y,Z serão colineares já que estarão todos sobre a reta do infinito.

3 Problemas

1.(Teorema de Brianchon) Seja $ABCDEF$ um hexágono circunscrito numa circunferência Γ. Prove que AD, BE, CF são concorrentes.

2.(Teorema da Borboleta) Seja Γ um círculo e AB uma corda dele. Seja ainda M o ponto médio de AB. Escolha dois pontos C,D sobre o mesmo arco AB de Γ. DM, CM intersectam Γ novamente em E,F, respectivamente. DF, CE intersectam AB em Y,Z, respectivamente. Prove que $YM = ZM$.

3.(OBM N2 2015/6) Seja ΔABC um triângulo escaleno e AD, BE, CF as bissetrizes internas, com $D \in BC, E \in AC, F \in AB$. Suponha que $\angle AFE = \angle ADC$. Calcule a medida de $\angle BCA$.

4.(OBM 2007/5) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, $P = AB \cap CD, Q = AD \cap BC, O = AC \cap BD$. Prove que se $= 90^o$, então OP é bissetriz de $\angle AOD$ e OQ é bissetriz de $\angle AOB$.

5.(OBM 2011/5) Seja ΔABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. Defina $D = BH \cap AC, E = CH \cap AB$. Seja $F = (ABC) \cap (ADE), F, A$ distinto de F. Prove que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se intersectam em um ponto sobre BC.

6.(IMO 2010/4) Seja ΔABC um triângulo escaleno e P um ponto em seu interior. As retas AP, BP, CP intersectam (ABC) novamente em K,L,M, respectivamente. A reta tangente a (ABC) por C intersecta AB em S. Prova que se $SC = SP$, então $MK = ML$.

7.(IMO 2014/4) Sejam P,Q pontos no lado BC do triângulo ABC tais que $\angle PAB = \angle BCA, \angle CAQ = \angle ABC$. Sejam M,N pontos sobre AP, AQ, respectivamente, tais que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que BM e CN se intersectam em um ponto sobre o circuncírculo de ABC.

8.(IMO SL 2016/G2) Seja ABC um triângulo com circuncírculo Γ e incentro I e M o ponto médio de BC. Sejam D,E,F pontos sobre BC, CA, AB, respectiva-

mente, tais que $ID \perp BC, IE \perp AI, IF \perp AI$. Seja X diferente de A o outro ponto de encontro de (AEF) com Γ. Prove que AM e XD se intersectam sobre Γ.

9.(TSTST 2015/2) Seja ABC um triângulo escaleno. Sejam K_a, L_a, M_a os pontos de interseção respectivos da bissetriz interna de $\angle BAC$, da bissetriz externa de $\angle BAC$, e da A-mediana relativa a ABC, com a reta BC. Defina $K_b, L_b, M_b, K_c, L_c, M_c$ de modo análogo. Prove que o circuncentro de $X_aX_bX_c$ está sobre a reta de Euler de ABC.

10.(IMO SL 2005/G6) Seja ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Seja γ o incírculo de ABC. AM intersecta γ em dois pontos K, L. As retas passando por K, L paralelas a BC intersectam γ novamente nos pontos X, Y. AX, AY intersectam BC nos pontos P, Q. Prove que $BP = CQ$.

11.(CHINA TST 2009/1) Seja ABC um triâgulo e D um ponto sobre BC tal que $\angle CAD = \angle CBA$. Um círculo de centro O que passa por B, D, intersecta AB, AD em E, F, respectivamente. BF intersecta DE em G. Seja M o ponto médio de AG. Prove que $CM \perp AO$.

12.(IMO SL 2017/G4) Seja ABC um triângulo e ω o A-excírculo de ABC, tangente às retas BC, CA, AB em D, E, F, respectivamente. O circuncírculo de ΔAEF intersecta BC em P, Q. Seja Mo ponto médio de AD. Prove que o circuncírculo de ΔMPQ é tangente a ω.

13.(IMO SL 2002/G7) Seja ABC um triângulo acutângulo e Ω seu incírculo. Ω tangencia BC em K. Seja M o ponto médio da altura relativa a A no ΔABC. KM intersecta Ω novamente em N. Prove que (BCN) é tangente a Ω.

14.(RMM 2012/6) Seja ABC um triângulo de incentro I e circumcentro O. Seja ω_A o círculo por B, C que tangencia o incírculo do triângulo ABC. Defina ω_B, ω_C de modo análogo. Esses mesmos círculos intersectam-se em A, A'. Os pontos B', C' são definidos analogamente. Prove que AA', BB', CC' concorrem em um ponto sobre a reta IO.

15.(USA TST 2017/5) Seja ABC um triângulo com altura AE. O A-excírculo de ΔABC tangencia BC em D e intersecta (ABC) em F, G. Prove que é possível escolher pontos V, N sobre DG, DF tal que o quadrilátero $EVAN$ é um losângulo.

4 Dicas

1. Use o Teorema de Pascal.
2. Use razão cruzada.
3. Mexa com quádruplas harmônicas e suas propriedades.
4. O que lembra bissetrizes internas e ângulos de 90º?

5. Use o Teorema da Bissestriz Interna.

6. Prove que o quadrilátero $KMLN$ é harmônico.

7. Prove que a reta tangente a (ABC) por B é paralela a AP.

8. Procure uma abordagem com o Teorema da Borboleta.

9. Defina os pontos X_a, X_b, X_c de uma maneira mais fácil de trabalhar (esses pontos têm várias propriedades).

10. Use o fato de que AM, DI, EF concorrem (prove isso).

11. Use o fato de que M é o ponto médio de AG de um modo inteligente.

12. Conjecture o ponto de tangência e realiaze uma abordagem com quadriláteros harmônicos.

13. Prove que KM passa pelo A-exincentro do ΔABC.

14. Observe a semelhança deste problema com o problema anterior. Tente usar o Teorema de Brianchon.

15. Realize uma abordagem com quadriláteros harmônicos.

5 Bibliografia

1. Uma Breve Introdução à Geometria Projetiva- Davi Lopes;

2. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad- Evan Chen;

3. The Method of Moving Points- Vladyslav Zveryk;

4. The Method of Animation- Zack Chroman, Gopal K. Goel, Anant Mudgal.