INVARIANTES E MONOVARIANTES

Ramyro Corrêa

1 Introdução

No geral, invariantes aparecem em grande parte em problemas de combinatória e , basicamente, são algumas estruturas que não mudam conforme certa propriedade dada pelo problema, como o próprio nome indica.

Por outro lado, as monovoriantes são estruturas que nunca vão possuir alguma propriedade conforme determinada propriedade dada pelo problema, como por exemplo: a soma dos n primeiros números de uma sequência é maior ou igual a alguma constante c, certa sequência é não-decrescente, etc.

2 Exemplos

2.1 Exemplo 1

(Cone Sul 2014/1) Em uma lousa, estão escritos os números inteiros de 1 a 2014,

inclusive. A operação válida é escolher dois números a e b, apagá-los e no lugar deles escrever o mínimo múltiplo comum de (a,b) e o máximo divisor comum de (a,b). Demonstre que, não importando a quantidade de operações realizadas, a soma dos números escritos na lousa é sempre maior do que $2014\sqrt[2014]{2014!}$.

Solução: Observe que quando realizamos a operação do problema, trocamos (a,b) por $(mmc(a,b)),(mdc(a,b))$. É fato conhecido que para inteiros positivos a,b, temos que $ab = mmc(a,b).mdc(a,b)$. Logo, o produto dos números na lousa é invariante. Agora, sejam $a_1,a_2,...,a_{2014}$ os números na lousa após algumas operações. Portanto, por $MA \geq MG$, temos que

$$a_1 + a_2 + ... + a_{2014} \geq 2014\sqrt[2014]{1.2.3.....2014} = 2014\sqrt[2014]{2014!}$$

, e como $mdc(1,n) = 1$ para todo n natural, 1 sempre está na lousa, logo a igualdade $a_1 + a_2 + ... + a_{2014} = \sqrt[2014]{2014!}$ não pode ocorrer. Então,

$$a_1 + a_2 + ... + a_{2014} > \sqrt[2014]{2014!}$$

como queríamos.

2.2 Exemplo 2

(OBM 2018 N2/5) Numa lousa estão escritos inicialmente os números $1,2,...,10$. Para quaisquer dois números a e b na lousa chamamos de $S_{a,b}$ a soma de todos os números na lousa com exceção de a e b. Uma operação permitida é escolher dois números a e b na lousa, apagá-los e escrever o número $a+b+\frac{ab}{S_{a,b}}$. Após realizar essa operação algumas vezes, restam na lousa apenas dois números x e y, com $x \geq y$. Determine o maior valor possível de x.

Solução: Uma ideia inicial para atacar o problema seria analisar a soma ou produto dos números na lousa para tentar achar uma invariante ou monovariante, mas após alguns minutos é possível notar que isso fica fora de controle conforme as operações vão sendo realizadas. Outra abordagem possível é analisar a soma dos números 2 a 2 distintos no quadro. Vamos provar que tal soma S é invariante. Seja S_n tal soma após n operações. Perceba que se a e b foram os números escolhidos na $n-$ésima operação, então

$$S_{n+1} = S_n - aS_{a,b} - bS_{a,b} - ab + (a+b+\frac{ab}{S_{a,b}})S_{a,b} = S_n - (a+b)S_{a,b} - ab + (a+b+\frac{ab}{S_{a,b}})S_{a,b} = S_n$$

Logo, S é invariante. Como inicialmente $S = 1.2 + 1.3 + 1.4 + ... + 9.10 = (1+2+...+10)^2 - (1^2+2^2+...+10^2) - S$, então $2S = 55^2 - (1^2+2^2+...+10^2) = 55^2 - \frac{10.11.21}{6} = 55^2 - 385 = 3025 - 385 = 2640 \implies S = 1320$. Esolhendo $y = 1$, temos que o valor maior possível de x é 1320, e para chegar em 1320, basta realizar as operações gulosamente.

2.3 Exemplo 3

(Problema 3) Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números a e b e trocá-los por $a+\frac{b}{2}$ e $b-\frac{a}{2}$. Prove que, depois de fazer

um movimento, não podemos obter os números iniciais novamente por meio de novas operações.

Solução: Seja S_k a soma dos quadrados dos números no quadro após k operações. Observe que se a,b foram os números escolhidos na $k-$ésima operção, então

$$S_{k+1} = S_k - a^2 - b^2 + (a + \frac{b}{2})^2 + (b - \frac{a}{2})^2 = S_k + \frac{a^2+b^2}{4} > S_k$$

Então $S_{k+1} > S_k$ para todo k natural, isto é, S_k é monovariante (só cresce). Logo, após realizarmos um movimento, é impossível obter os números iniciais novamente, pois caso contrário térriamos $S_0 > S_k > S_0$ para algum k, absurdo.

3 Problemas

(Problema 1) Escrevemos os números inteiros de 1 a 10 (inclusive) no quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Qual é esse número?

(Problema 2) Seja n um inteiro positivo ímpar. Inicialmente, Evan escreve os números $1,2,...,2n$ no quadro. Uma operação consiste em escolher dois números a e b no quadro, apagá-los e escrever no lugar $|ab|$. Ele realiza essas operações até que sobre apenas um número. Prove que o número final é ímpar.

(Problema 3) Removemos dois cantos opostos de um tabuleiro $8x8$. É possível cobrir o tabuleiro resultante com dominós $1x2$?

(Problema 4) Escrevemos os números de 1 a 19 no quadro. A cada passo trocamos dois números da lousa a e b por $\sqrt{a^2+b^2}$. Ao final irá restar apenas um número. Quais os possíveis valores desse número?

(Problema 5) Temos 2018 moedas sobre uma mesa. Dessas, 199 estão com a face cara virada para cima, e as demais com a face coroa. Uma operação consiste em escolher duas moedas e virá-las simultaneamente. É possível, após um número finito de operações, obtermos todas as moedas com a mesma face virada para cima?

(Problema 6) Um círculo é dividido em seis setores. Então os números $1,0,1,0,0,0$ são escritos nos setores (no sentido anti-horário). Uma operação permitida é adicionar uma unidade em dois setores vizinhos. É possível, após um número finito de operações, obter todos os números dos setores iguais?

7.(IMO SL 2017/C1) Um retângulo $\mathscr{R}$ com comprimentos laterais inteiros positivos ímpares é dividido em pequenos retângulos com comprimentos laterais inteiros. Prove que existe pelo menos um entre os pequenos retângulos cujas distâncias dos quatro lados de $\mathscr{R}$ são todas ímpares ou todas pares.

8.(IMO SL 2012/C1) Vários inteiros positivos são escritos em uma linha. Iterativamente, Alice escolhe dois números adjacentes x e y de forma que $x > y$ e x estejam à esquerda de y e substitui o par (x,y) por $(y+1,x)$ ou $(x-1,x)$. Prove que ela pode executar apenas um número finito de iterações.

9.(USA TSTST 2019/3) Em um reticulado infinito, colocamos um número finito de carros, cada um ocupando uma única célula e estando em uma das quatro direções. Os carros nunca podem ocupar a mesma célula. É dado que a célula imediatamente à frente de cada carro está vazia e, além disso, não há dois carros virados um para o

outro (nenhum carro voltado para a direita está à esquerda de um carro voltado para a esquerda dentro de uma fileira, etc.). Em um movimento, escolhe-se um carro e o desloca uma célula à frente para uma cela vazia. Prove que existe uma sequência infinita de movimentos válidos usando cada carro infinitas vezes.

4 Dicas

1. Procure por uma invariante.
2. Analise paridade.
4. Pense em como trabalhar com a raiz quadrada de uma maneira eficaz.
5. Analise paridade.
6. Pinte os setorez alternadamente de preto e brnaco.
7. Pinte o tabuleiro de xadrez.
8. Veja o que ocorre quando a operação é realizada muitas vezes.
9. Pinte as colunas alternadamente de preto e branco.

5 Bibliografia

1. https://www.obm.org.br/content/uploads/2019/01/Carlos$_{S}hine_{i}nvariantes_{m}onovariantes.pdf$
2. https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/George-Alencar-Problemas-diversos-de-invariantes-e-semi-invariantes.pdf