Princípio das Gavetas de Dirichlet

Denys Melo

1 Introdução

O Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos, é um dos métodos de demonstração mais utilizados em competições matemáticas. Embora seja bastante intuitivo, o princípio de Dirichlet tem como objetivo comprovar a existência de conjuntos finitos, cujos elementos satisfazem propriedades específicas. Ademais, possuem aplicações em várias áreas da matemática, quais sejam: Álgebra, Geometria, Combinatória, Grafos e Teoria dos Números.

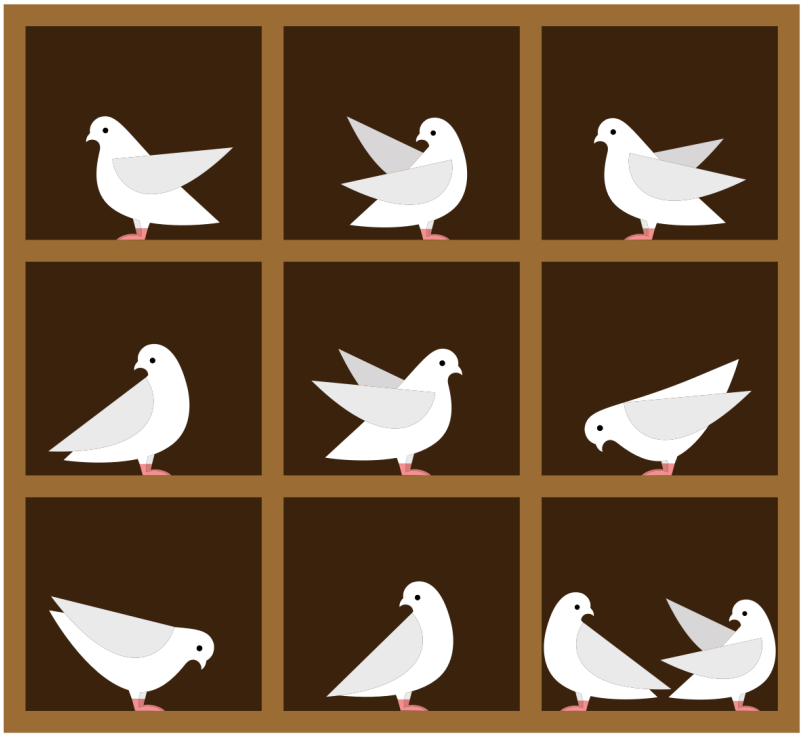
2 Algumas versões para o mesmo problema.

Na solução de problemas, os "pombos" geralmente são números, objetos ou ações, enquanto que as "casas" ou "gavetas" estão relacionadas às propriedades que os números, objetos e ações possuem. Tal propriedade nos permitirá mapear todas as possíveis exigências imposta pelo problema.

Vejamos alguns possíveis enunciados para o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Princípio da Casa dos Pombos - PCP: Se n pombos entram em m casas e $n < m$, então pelo menos uma das casas deve conter dois ou mais pombos.

Demonstração. De fato, se nenhuma casa tivesse dois ou mais pombos, teríamos no máximo n pombos. É bastante intuitivo!



Princípio das Gavetas de Dirichlet: Se tivermos $n + 1$ objetos para serem colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter 2 ou mais objetos.

Demonstração. Seja x_i o número de objetos contidos na gaveta $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Temos que, a soma $x_1 + x_2 + ... + x_n = n + 1$ constitui a totalidade dos objetos. Então, suponhamos por absurdo que nenhuma das gavetas possuem mais de *1* objeto, ou seja, $x_i \leq 1$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Logo, $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq n$, o que constitui uma contradição. Portanto existe pelo menos algum $x_i > 1$, ou seja, $x_i \geq 2$, o que significa que pelo menos 2 objetos ocupam a mesma gaveta.

Uma versão alternativa pera esse enunciado é: "Se n objetos forem colocados em, no máximo, n - *1* gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos 2 objetos."

Vamos usar essas informações para resolver alguns problemas elementares, sempre com uma boa dose de de engenhosidade. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. No filme "Doze É Demais" há 12 crianças na família.

a) Prove que pelo menos duas das crianças nasceram no mesmo dia da semana.

Solução. O Princípio da Casa dos Pombos nos diz que: se n pombos entram em m casas e $n > m$ então pelo menos uma das casas deve conter dois ou mais pombos. Idenficando os "pombos" e as "casas", temos:

Pombos: são as 12 crianças (n);

Casas: são os 7 dias da semana (m);

Como $n > m$, então, pelo menos duas crianças nasceram no mesmo dia da semana.

b) Prove que pelo menos dois membros da família (incluindo pai e mãe) fazem aniversário no mesmo mês.

Solução. Perceba que, são 14 membros da família (pombos) e apenas 12 meses (casas), logo, pelo PCP, haverá pelo menos dois membros da família que fazem aniversário no mesmo mês. Apenas não é possível saber quem são os aniversariantes.

c) Supondo que haja quatro quartos de criança na casa, mostre que há pelo menos 3 crianças dormindo em pelo menos um deles.

Solução. De fato, se em nenhum dos quartos tivesse pelo menos 3 crianças, então, cada um teria duas ou menos crianças, e como existem quatro quartos na casa, então o número emphn de crianças em cada um seria tal que: $n \leq 4x2 = 8$, mas sabemos que na casa há 12 crianças, portanto, temos uma contradição. Logo, na casa, há pelo menos 3 crianças dorminhdo em pelo menos um dos quartos. Exemplificando, temos:

Pombos: representam as 12 crianças que deverão ser distribuídas nos quartos;

Casas: são os 4 quartos da casa.

Exemplo 2. A empresa aérea "Pombos Correios Velozes" tem 500 funcionários. Mostre que pelo menos dois deles nasceram no mesmo dia do ano.

Solução. São 500 funcionários, e apenas 366 dias do ano (considerando anos bissexto) possíveis em que poderiam ter nascido, logo, aplicando o Princípio da Casa dos Pombos (PCP), pelo menos dois dos funcionários compartilham o mesmo dia de nascimento. Note, que: n > m.

Pombos: são os 500 funcionários (n);

Casas: são os 366 dias do ano (m).

Exemplo 3. Um Engenheiro Florestal verificou que em uma mata de Araucárias existem 800.000 pinheiros. Cada pinheiro tem no máximo 600.000 pinhão (sementes). Mostre que, pelo menos, dois pinheiros têm o mesmo número de pinhão.

Solução. Identificando os "pombos" e as "casas":

Pombos: são os 800.000 pinheiros (n)

Casas: são os pinhões (máx. 600.000), tal que: $0 \leq m \leq 600.000$

O que temos que fazer é associar e classificar cada árvore em grupos conforme a quantidade de sementes que produzem. Pense em uma função (não injetiva) que

satisfaz essa propriedade!

Assim, teremos o 1º grupo formado por árvores que não produzem sementes, o 2º grupo formado por árvores que produzem exatamente uma semente, o 3º grupo formado pelas que produzem exatamente duas sementes e assim sucessivamente até o 600.001º grupo representado pelas árvores que produzem exatamente 600.000 sementes.
Note que existem mais pinheiros do que um número m possível de sementes (pinhão), tal que: $n > m$, logo, existem pelo menos duas árvores com o mesmo número de sementes, conforme PCP.

Exemplo 4 (Latvian - Icelandic Mathematics Project). Uma mesa quadrada consiste em um tabuleiro formado por quadrados 6 x 6 . Em cada quadrado está escrito "+1", "- 1" ou "0". Prove que, calculando a soma dos números escritos em cada coluna, cada linha e cada diagonal do tabuleiro, então duas das somas serão iguais.

Solução. Vamos agrupar os valores (resultados) das ações (somas) de cada coluna, cada linha e cada diagonal. Essa é a propriedade que associa os números de cada quadrado do tabuleiro com a soma direcionada em linhas, colunas e diagonais.
Note que iremos realizar 14 somas, haja vista que o tabuleiro possui 6 linhas, 6 colunas e 2 diagonais. Identificando os "pombos" e as "casas", temos:

Pombos: são todas as 14 ações (somas) realizadas nas linhas, colunas e diagonais, ou seja, (n) ações

Casas: são os 13 possíveis resultados obtidos das somas, isto é: $-6 \leq m \leq 6$.

Perceba que ao somar, conforme determina a regra, encontramos 13 resultados diferentes: $\{-6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, tal que: $m \in [-6;\ 6\,]$.
Veja que, a cardinalidade do conjunto dos pombos é maior do que a cardinalidade do conjunto das casa. De fato, essa é a essência do PCP: Se n pombos entram em m casas e $n > m$ então pelo menos uma das casas deve conter 2 ou mais pombos. De fato, $n = 14 > m = 13$.

Exemplo 5. Mostre que em um grupo de n pessoas há sempre duas pessoas

que conhecem exatamente o mesmo número de outras pessoas desse conjunto.

Solução. Vamos resolver este problema usanto o conceito de gavetas de Dirichlet. Perceba que, conhecer é uma relação simétrica, de modo que, se a conhece b, então b conhece a. Logo, dentro desse grupo de n pessoas, qualquer uma delas pode conhecer no mínimo 0 (quando não se conhece ninguem - "penetra") e no máximo n - 1 pessoas (quando se conhece todo mundo). Aplicando o princípio as gavetas de Dirichlet temos:

Objetos: são as n pessoas;

Gavetas: representam o número de pessoas que cada indivíduo pode conhecer (de 0 até n - 1);

Propriedade: existe uma funçao que mapeia cada pessoa ao número de pessoas que ela conhece.

Ademais, sabemos que: "se n objetos forem colocados em, no máximo, n - 1 gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos 2 objetos".
Assim, uma das gavetas 0 e n - 1 permanecerá desocupada, haja vista que não existe a possibilidade de conhecer 0 e n - 1 pessoas simultaneamente. Portanto, temos n objetos para serem distribuídos em n - 1 gavetas. Logo, pelo princípio das gavetas de Dirichlet, pelo menos um das gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, existem pelo menos duas pessoas que conhecem o mesmo número de pessoas do referido conjunto.

Exemplo 6. Os antropologistas afirmaram que o número de cabelos de um ser humano não pode ser superior a 500.000. Prove que no Rio de Janeiro vivem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de cabelos.

Solução. Considere que os habitantes do Rio de Janeiro estejam separados em grupos, de modo que tenhamos o 1º grupo representados pelas pessoas calvas, no 2º grupo as pessoas com exatamente um fio de cabelo, no 3º grupo as pessoas com exatamente dois fios de cabelo e assim sucessivamente até o 500.001º grupo representado pelas pessoas com exatamente 500.000 fios de cabelo.Identificando os objetos que serão distribuidos em alguma gaveta de Dirichlet, temos:

Objetos: são os habitantes do Rio de Janeiro (n + 1 objetos);

Gavetas: são as possibilidades de fios de cabelo ($0 \leq n \leq 500.000$);

Propriedade: é descrita por uma função que "mapeia" a quantidade de fios de cabelo de cada um dos habitantes. Essa função diz que há pelo menos dois habitantes que compartilham a mesma característica específica, ou seja, pertencem ao mesmo grupo.

Você deve supor que no Rio de Janeiro o número de habitantes é bem superior às 500.001 possibilidades (gavetas). Essa informação é essencial para resolvermos o problema. Logo, distribuindo todos os habitantes nos 500.001 grupos formados, teremos pelo menos duas que estão em algum grupo que compartilham o mesmo número de fios de cabelo. Note que não sabemos precisar qual é o grupo em que pelo menos duas pessoas compartilham a mesma propriedade, ou seja, não sabemos exatamente se essas pessoas estão no grupo das que possuem 200, 320 ou 470 fios de cabelo, por exemplo.

Teorema 1. (Generalização do Princípio das Gavetas de Dirichlet): Sejam k, r inteiros tal que k, $r \geq 1$. Se distribuirmos $k \times n + r$ objetos em n gavetas, então em alguma gaveta teremos pelo menos $k + 1$ objetos.

Demonstração. Note que o Princípio de Dirichlet generalizado implica na primeira versão do princípio das gavetas de Dirichlet já apresentado, basta fazer $k = r = 1$. Seja x_i o número de objetos contidos na gaveta $i \in \{1, 2, ..., n\}$, mesmo não sabendo a priori o valor do x_i, sabemos que a soma $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq k \times n + 1$ (considere r = 1). Suponhamos então que não temos mais do que k objetos em cada uma das n gavetas. Logo $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq k \times n$, o que contradiz o fato de termos $k \times n + 1$ objetos. Portanto, uma das gavetas conterá pelo menos $k + 1$ objetos. Note que: se mais de $k \times n$ objetos (note que, $k \times n + 1$ é suficiente) forem divididos em n gavetas, então definitivamente haverá uma gaveta com pelo menos $k + 1$ objetos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 7 ("Baltic Way" competition). Em um lar de idosos moram 160 velhinhos que são muito bem cuidados. Nenhum deles tem mais de 78 anos. Prove que há três velhinhos da mesma idade nesse lar.

Solução. Pelo princípio generalizado de Dirichlet, deve haver, pelo menos, $k + 1$ objetos que compartilham a mesma propriedade: apresentar a mesma idade.

De fato, $k + 1 = 3$, logo, $k = 2$. Portanto, já existem 2 vilhinhos que possuem a mesma idade. Falta verificar se pelo menos mais um idoso ($k \times n + 1$) também goza dessa mesma propriedade. Identificando os objetos e as gavetas temos:

Objetos: são os velhinhos que moram no lar ($k \times n + r = 160$);

Gavetas: são as possíveis idades que variam de 0 até 78 ($0 \leq n \leq 78$).

Propriedade: associa o número de velhinhos com suas respectivas idades.

Note que, separando os velhinhos por classes de idade em comum, teremos 79 grupos ($n = 79$ gavetas) variando de 0 até 78, em que cada gaveta "guarda" uma idade.
Logo, substituíndo k, em $k \times n + r = 160$, temos: $2 \times 79 + r = 160$, logo, $r = 2$ velhinhos, ou seja, sobraram 2 velhinhos que deverão fazer parte de algum grupo. Logo, pelo princípio de Dirichlet, haverá um grupo com pelo menos 3 velhinhos com a mesma idade. Ademais, provamos que $r \geq 1$.

Uma solução alternativa para esse problema poderia ser feita por contradição. Então vamos mapear todos os velhinhos agrupando-os por idade, de modo que, cada grupo $x_i = 2$, seja formado por, no máximo 2 velhinhos com idade $i \in$ [0; 78].
Então, seja $x_0 = 2$, o 1º grupo formado por não mais que 2 velhinhos com idade 0 ; $x_1 = 2$, o 2º grupo formado por não mais que 2 velhinhos com idade 1; e assim sucessivamente até o 79º grupo $x_{78} = 2$, formado por não mais que dois velhinhos com a idade limite de 78 anos. Logo, na casa não vivem mais que 158 velhinhos. Vejamos.

$$\sum_{i=0}^{78} x(i) = x_0 + x_1 + ... + x_{78} = 2 + 2 + ... + 2 = 158$$

Mas, de acordo com hipótese do problema, há 160 velhinhos no lar. Então, temos uma contradição. Portanto há, de fato, mais de 2 velhinhos com a mesma idade.

3 Aplicações.

Veremos, agora, alguns resultados matemáticos obtidos com o auxílio do Princípio das Gavetas de Dirichlet, evidenciando sua grande utilidade como método de demonstração em várias áreas da matemática.

Proposição 1. (Média Aritmética e o Princípio das Gavetas). Sejam $x_1 + x_2 + ... + x_n$ inteiros positivos e M um inteiro positivo dado. Se a média aritmética dos números $x_1 + x_2 + ... + x_n$ é maior do que M, então pelo menos um dos números x_i é maior do que M.

Demonstração. Seja N a quantidade de gavetas e x_i a quantidade de objetos alocados na gaveta i, para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$. Então, por contradição, se a quantidade de objetos por gavetas for menor ou igual a M, ou seja, $x_i \leq M$, para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$, temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N} \leq \frac{M + M + ... + M}{M} = \frac{nM}{M} = M$$

Mas isso é uma contradição. Logo, pelo menos um dos números x_i é maior do que M. Vejamos um exemplo.

Exemplo 8. São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de azul e vermelho. No disco A há 100 setores azuis e 100 vermelhos, mas não sabem em que ordem. No setor não sabemos quantos são azuis e nem quantos são vermelhos. Colocamos o disco A sobre o B, de modo que os setores de A fiquem exatamente sobre os setores de B. Então é possível, girando o disco A, obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondente de B.

Solução. Coloquemos o disco A sobre B e seja a_1 a quantidade de setores sobrepostos que têm cores iguais. Gire A de um setor, ou seja, 360/200º deixando B fixo e seja a_2 o número de setores sobrepostos com cores coincidentes. Faça esse processo e obtenha $a_3, a_4, ...,$a$_{200}$. Assim, a quantidade de coincidências após 200 giros é igual a $a_1, a_2, ...,$a$_{200}$ e esse valor é igual a 100×200. Note que, se fixarmos um setor do disco B, digamos que seja da azul, haverá 100 posições em que a cor dele coincidirá com algum de A. Logo, a quantidade de coincidências é igual a 100 vezes o número de setores de B e assim, teremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{200}}{200} = 100 > 99$$

Perceba que, se a média aritimética dos a_i é maior que 99, então pelo menos um deles deverá ser maior ou igual a 100. Portanto, em algum momento o número de coincidências é maior ou igual a 100.

A próxima aplicação usa o Princípio da Casa dos Pombos para demonstrar um resultado sobre funções.

Proposição 2. Sejam A e B dois conjuntos finitos com n e m elementos respectivamente. Se $n > m$, então não existe uma função injetora de A em B.

Demonstração. Dizemos que uma função $f\colon A \to B$ é injetora se elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, isto é, se $n_1, n_2 \in A$, são tais que: se $n_1 \neq n_2$, então $f(n_1) \neq f(n_2)$.

Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, considere A o conjunto formado pelos pombos $n_1, n_2 ... n_i$, tal que, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ e $n = n_1 + n_2 + ... + n_n$. Considere B o conjunto formado pelas casas $m_1, m_2 ... m_i$, tal que $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $m = m_1 + m_2 + ... + m_m$, de modo que, $n > m$ (cardinalidade de A maior do que a cardinalidade de B). Assim, uma função é injetora se existir uma única e exclusiva "casa" para cada "pombo". Mas, isso só é possível se o número de "pombos" for menor ou igual ao número de "casas" ($n \leq m$), o que é uma contradição. Logo, teremos, pelo menos dois "pombos" $n_1, n_2 \in A$, com $n_1 \neq n_2$ que ocuparão a mesma casa, ou seja, $f(n_1) \neq f(n_2)$.

De fato, dado um conjunto A com $n + 1$ elementos e um conjunto B com n elementos tal que $n \geq 1$, então para toda função $f : A \to B$, existe pelo menos um elemento em B que é mapeado por, pelo menos, dois elementos distintos de A , e portanto, f nao é injetora. Essa é a essência do Princípio de Dirchlet.

O próximo resultado é importante para prosseguirmos.

Corolário 1. Se $d|a$ e $d|b$, então $d|(xa + yb)$ para todo $x, y \in Z$. Verifique!

Proposição 3. (Bézout's identity). Sejam a e b dois números inteiros não nulos e d o máximo divisor comum de a e b. Então, existem dois números inteiros

x e y tais que $d = ax + by$.

Definição 1. Dados dois inteiros não nulos a e b, definimos o máximo divisor comum de a e b como sendo o maior inteiro d pelo qual ambos a e b são divisíveis.

Definição 2. Se a e b são inteiros com $mdc(a,b) = 1$, então dizemos que a e b são relativamente primos.

Demonstração. Note que, $d = ax + by$ se, e somente se, $1 = (\frac{a}{d})\, x + (\frac{b}{d})\, y$. Então, sem perda de generalidade (Corolário 1), podemos supor que a e b são primos entre si. Logo, se $mdc(a,b) = 1$, considere a sequência $A = \{a,\ 2a,\ 3a,\ ..., ba\}$. Afirmamos que existe algum número no conjunto A que deixa resto 1 quando dividido por b. De fato, se isso não ocorresse, teríamos b números em A deixando no máximo $b-1$ restos diferentes quando divididos por b. Logo pelo pincípio das gavetas de Dirichlet, dois deles, digamos ia e ja com $b > j > i \geq 1$, devem deixar o mesmo resto quando divididos por b. Assim, $(j-i)a$ é divisível por b. Mas, como estamos supondo que $mdc(a,b) = 1$, temos que b deve dividir $j-i$, o que é uma contradição, pois $b > j-i > 0$. Portanto, algum dos números em A deixa resto 1 quando divididos por b, onde $ax - 1 = by$, o que encerra a nossa demonstração.
De fato, se d divide a e b, então d divide qualquer combinação linear inteira de a e b.

Corolário 2. Mostre que, para todo n e para todo $a_0, a_1, ..., a_n$ inteiros quaisquer, existem a_i e a_j tal que $a_i - a_j$ seja divisível por n.

Demonstração. Veja que, o conjunto $\{a_0, a_1, ...a_n\}$ tem $n+1$ números, e os possíveis restos da divisão de $a_i - a_j$ por n são $0, 1, 2, 3, ..., n-1$. Neste caso, os objetos são os $n+1$ números, e as gavetas são os possíveis restos da divisão por n. Logo, pelo princípio das gavetas de Dirichlet, ao menos 2 números $a_i - a_j$ devem ter o mesmo resto r.

De fato, dado um natual n, se dois númeos inteiros deixam restos iguais na divisão por n, então a diferença deles é um múltiplo e n.

Corolário 3. Sejam a, b, c inteiros. Se $mdc(a,b) = 1$ e $a|bc$, então $a|c$. Verifique! É uma consequência da identidade de Bezóut.

Considerando os resultados, até aqui apresentados, vejamos mais um exemplo.

Exemplo 9. Prove que, dentre os números $5, 5^2, 5^3, ..., 5^{13}$, pelo menos um deixa resto 1 quando dividido por 14.

Demonstração. Considere r sendo os possíveis restos da divisão por 14. Note que o $mdc(5^n, 14) = 1$, tal que: $1 \leq n \leq 13$, portanto, $14 \nmid 5^n \rightarrow r = \{1, 2, ..., 13\}$. Afirmamos, portanto, que existe algum 5^n com $1 \leq n \leq 13$, que deixa resto 1 quando dividido por 14. De fato, se isso não ocorresse, teríamos:

Objetos: os treze números;

Gavetas: os doze possíveis restos *(2,..., 13)*;

Propriedade: Cada número está associado ao seu resto.

Assim, pelo princípio das gavetas de Dirchlet, ao dividirmos os 13 números por 14 vamos obter, pelo menos dois deles, digamos: 5^{n_1} e 5^{n_2} tal que, $n_1 > n_2$, com o mesmo resto. Logo, a diferença entre eles será divisível por 14, conforme corolário 2. Vejamos!

$$14 \mid (5^{n_1} - 5^{n_2}) \rightarrow 14 \mid 5^{n_2} (5^{n_1 - n_2} - 1)$$

Mas o $mdc(5^n, 14) = 1$, logo, $14 \mid (5^{n_1 - n_2} - 1) \rightarrow 14 \mid 5^{n_2} (5^{n_1 - n_2} - 1)$, conforme corolário 3. Então, $\exists\, q$ tal que: $5^{n_1 - n_2} - 1 = 14\, q + 1$, o que é uma contradição. Portanto, existe algum 5^n com $1 \leq n \leq 13$ que deixa resto 1 quando dividido por 14.

Exemplo 10 (Colorado Springs Mathematical Olympiad 1986). Considere n números inteiros $a_0, a_1, ...a_n$, não necessáriamente distintos. Mostre que existe um conjunto de números inteiros consecutivos $a_{k+1},\ a_{k+2}, ..., a_l$, tais que a soma: $S = a_{k+1} +\ a_{k+2} + ... + a_1$ é um múltiplo de n.

Demonstração.. Este problema nos remete ao corolário 2. O fato de termos 2^n possíveis subconjuntos, também parece nos ajudar! No entento, há uma importante diferença. Não podemos subtrair dois conjuntos quaisquer - como fizemos no corolário 2. Para subtrairmos, os conjuntos devem estar contidos um no outro. Isso nos dá a idéia de utilizar subconjuntos crescentes, o que é fundamental. Neste caso, $S_1 = \{a_1\}$, $S_2 = \{a_1, a_2\}$,..., $S_n = S$. Mas, ainda não é suficiente! Note que temos n casas (restos da divisão da soma dos elementos por n) e n pombos (subconjuntos S_n). Então precisamos contornar essa situação, sempre há uma saída! Se um desses subconjuntos possuir resto zero, então, já encontramos o subconjunto que queremos. Senão, nos resta $n-1$ possíveis restos, e podemos usar o Princípio da Casa dos Pombos para mostrar que existem, ao menos, dois subconjuntos S_k e S_l que possuem a soma com o mesmo resto quando divididos por n. Neste caso, consideremos, sem perda de generalidade, uma sequência estritamente crescente ($0 \leq k < l \leq n$), tal que o conjunto $S_l - S_k$ deixa resto zero quando dividido por n.

Então, considere os números:

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, ...,\ a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Considere, também, os subconjuntos das somas:

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ ... \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{gathered}$$

Devemos mostrar que existe uma sequencia de números consecutivos (tome uma série estritamente crescente) tal que, existem inteiros k e l com $0 \leq k < l \leq n$ de modo que a soma:

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l$$

seja divisível por n. Então, dividindo esses inteiros por n, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_1 = nq_i + r_i \ \ (0 \leq r_i \leq n-1),\ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Portanto, se algum dos restos $r_1, r_2, ...r_n$ é zero, digamos $r_k = 0$, então a soma $a_1 + a_2 + ... + a_k$ é multiplo de n. Logo, basta tomar $k = 0$ e $l = n$.

Se nenhum dos restos $r_1, r_2, ...r_n$ é zero, então dois deles devem ser iguais, visto que: $0 \leq r_i \leq n-1$ para todo i, digamos $r_k = r_l$ com $k < l$. Isso significa que os dois inteiros $a_1 + a_2 + ... + a_k$ e $a_1 + a_2 + ... + a_l$ têm o mesmo resto. Logo, a soma $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l$ é um múltiplo de n.

Perceba que mostramos a existência de um subconjunto de números consecutivos ($0 \leq k < l \leq n$) cuja a soma é divisível por n, conforme queríamos demonstrar!

Note que, os restos das n somas $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$ são as $n-1$ gavetas de Dirichlet (ou casa dos pombos), logo existem duas somas: $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ e $S_l = a_1 + a_2 + ... + a_l$, tal que $k < l$ e $a_k + a_l \leq n$ com o mesmo resto quando divididas por n. Logo,

$$S_l - S_k = \sum_{i=k+1}^{l} a_i$$

possui a propriedade desejada.

De fato, se dois números estão na mesma gaveta, então, a diferença entre eles será um múltiplo de n. Isso ocorre porque essa difereça ainda é uma soma, haja vista que $S_l - S_k$ é igual a soma $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l$ para quaisquer dois índices dinstintos $k < l$. Logo, Com n pombos, dois deles devem ter o mesmo resto (conforme mostramos), então sua diferença, que é uma soma de vários dos números originais, será um múltiplo de n, e pronto!

Exemplo 11 Um mestre de xadrez, que tem apenas 11 semanas para se preparar para um torneio, decide jogar pelo menos uma partida por dia mas, para não se cansar, decide não jogar mais de 12 partidas em qualquer semana do calendário. Mostre que existe uma sucessão de dias consecutivos durante os quais o mestre do xadrez terá jogado exatamente 21 partidas.

Solução. Seja a_1 o número de partidas jogadas no 1º dia, a_2 o número de partidas jogadas no segundo dia e assim sucessivamente até o 77º dia. Considere

a sequência estritamente crescente: $a_1, a_2, ...a_{77}$, tal que: $a_1 \geq 1$, é o mínimo da série, e $a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$ é o máximo.

Seja a_i, com $1 \leq i \leq 77$ o número de jogos disputado até o $i-$ésimo dia, incluindo os jogos disputados nesse dia. Então

$$a_1 < a_2 < ... < a_{77} < 132 \quad \text{(I)}$$
$$a_1 + 21 < a_2 + 21 < ... < a_{77} + 21 < 132 + 21 = 153 \quad \text{(II)}$$

Observe que não existe a_i, a_j tal que $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 77$, e $a_i = a_j$. Da mesma forma, na equação (II), $a_1 + 21$ até $a_{77} + 21$ são termos distintos, haja vista que são sequências estritamente crescentes. Segue-se que existem $2 \times 77 = 154$ termos de soma (pombos) e 153 valores inteiros distintos (casas). Portanto, existem dois termos da sequência com o mesmo valor (No proxímo exemplo provaremos isso!), ou seja, $a_i = a_j + 21$, e isso implica que $a_i - a_j = 21$. Assim, existe um período de $i - j$ dias consecutivos, durante o qual exatamente 21 jogos são jogados nos dias $j+1, j+2, ..., i$.

Exemplo 12 (IMO 1972). Prove que a partir de um conjunto de 10 números distintos, no sistema decimal, é possível selecionar dois subconjuntos disjuntos cujo membros têm a mesma soma.

Solução. Queremos que dois subconjuntos tenham a mesma soma, então considere que os subconjuntos sejam os pombos e as somas os as casas. Primeiro, vejamos as somas. A menor soma possível é 10 e a maior soma possível é: $99 + 98 + 97 + ... + 90$. Como vamos fazer isso precisamente? Vamos usar o truque de emparelhamento gaussiano (Lembre-se da soma da P.A de Gauss!), isto é, $189 \times 5 = 945$. Consequentemente, existem $945 - 10 + 1 = 936$ somas diferentes. Agora precisamos contar o número de pombos. O número de subconjuntos de um conjunto é 2^n, logo $2^{10} = 1024$. Como $1024 > 936$, há mais pombos do que casas, então terminamos: dois dos subconjuntos devem ter a mesma soma!

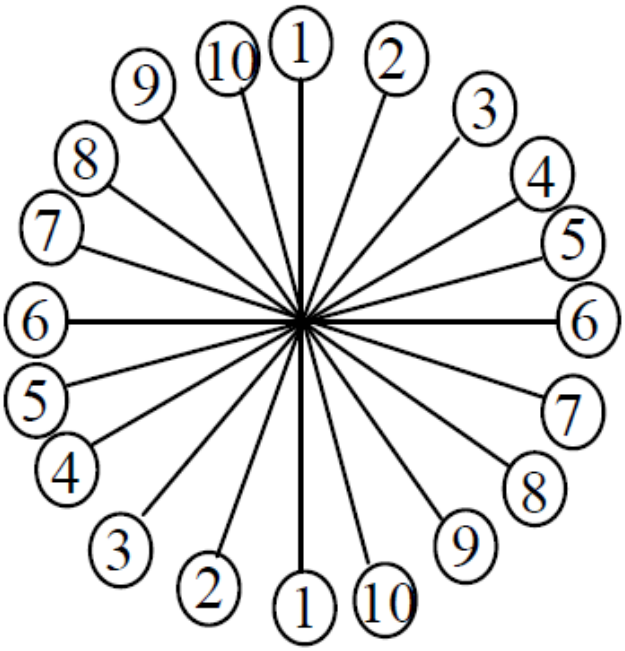
Mas provamos tudo o que o problema exige? Ainda não. O problema especifica que os dois subconjuntos são disjuntos. Não entre em pânico! Até qui, já alcançamos uma solução parcial: mostramos que existem dois subconjuntos diferentes (possivelmente não disjuntos) que têm a mesma soma. Podemos usar isso para encontrar dois subconjuntos disjuntos com a mesma soma? Claro. Sejam A e B os dois conjuntos. Divida em casos:

1º Caso: A e B são disjuntos. Feito !
2º Caso: A e B não são disjuntos. De cada conjunto, remova os elementos que eles possuem em comum. Agora temos conjuntos disjuntos, mas as somas ainda são as mesmas (por quê?), Então acabamos ! Veja que você usou o Princípio da Casa dos Pombos para provar que os dois subconjuntos devem ter a mesma soma.

Perceba que esse resultado é forte! Ademais, acreditamos que com esse resultado você pode ter uma visão mais ampla sobre os exemplos 10 e 11.

Exemplo 13. Em volta de uma mesa redonda estão sentados 20 pessoas: 11 homens e 9 mulheres. Prove que existem dois homens sentados frente a frente.

Solução. Basta usar uma dose de engenhosidade! Vamos compor 10 grupos (caixas de Diriclhet), de modo que cada um seja formado por um par de lugares opostos (frente a frente), conforme figura abaixo. Como 11 homens são distribuídos em 10 grupos (caixas), logo, pelo princío de Dirichlet, dois homens estão sentados frente a frente.



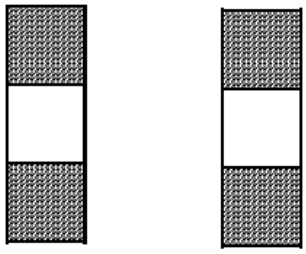
4 Geometria, Coloração, Pombos e um pouco de criatividade.

Exemplo 14 (LAIMA Mathematical Olympiads). Um retângulo 4 x 7 é formado por quadrados, de modo que, cada quadrado é colorido de branco ou Preto. Prove que é possível encontrar duas linhas e duas colunas, onde todos os quatro quadrados, que estão em seus pontos de intersecção, são colorido na mesma cor.

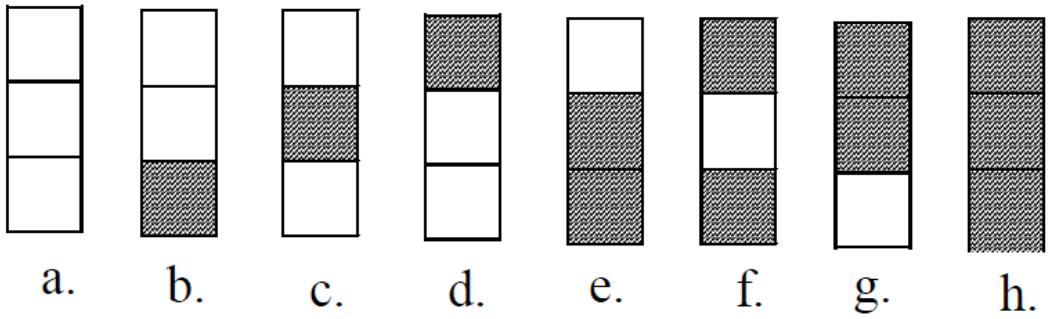
Solução. Vamos provar mais do que é exigido no problema: vamos provar que essas duas linhas e duas colunas já podem ser encontradas no retângulo com parâmetros 3 x 7 quadrados (ou seja, dentro dos limites de parte do retângulo mencionada no problema). Observemos alguns casos:

1º Caso: perceba que em cada coluna (formada de 3 quadrados) é possível encontrar 2 quadrados coloridos da mesma cor. Segue do Princípio de Dirichlet: as cores são as casas, e os quadrados são os pombos!

2º Caso: se duas colunas são coloridas iguais, então é possível encontrar os 4 quadrados mencionados no problema, de modo que em ambas as colunas você deve levar o mesmo par de quadrados com a mesma cor, conforme figura abaixo.



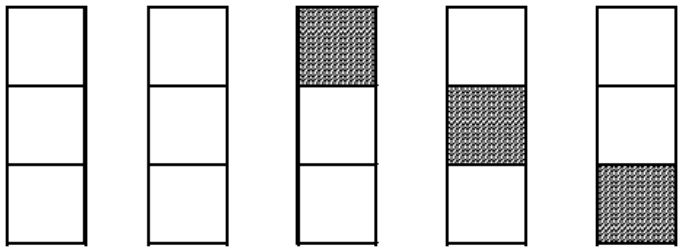
Notemos que, no total, 8 diferentes colorações de colunas são possíveis. Veja na figura seguinte.



Além disso, discutiremos outras situações! Precisamos analisar as possibilidades que nos permitam atender a a exigência do problema.

3º Caso: considerando o tetângulo 4×7, note que entre 7 colunas não há nenhuma, cujo quadrados são todos coloridos com a mesma cor, com exceção das colunas "a" e "h" simultaneamente. Neste caso, cada uma dessas 7 colunas pertence a um dos 6 tipos: a, b, c, d, e, f, g. De acordo com o princípo de Dirichlet, duas colunas pertencem ao mesmo tipo, ou seja, elas têm cores semelhantes, logo, é possível encontrar os 4 quadrados necessários.

4º Caso: vamos supor que alguma das 7 colunas seja colorida com quadrados na cor preto ou branca, suponhamos que seja branco (ou seja, pertence ao tipo "a"). Se em pelo menos uma das 6 colunas restantes pertencer a qualquer um dos tipos "a", "b", "c", "d", então, olhando para esta coluna e a branca, ainda assim, é possível encontrar os 4 quadrados conforme exigido, vejamos.



5º Caso: agora resta discutir a situação, quando nenhuma das 6 colunas restantes é do tipo "a, b, c, d", então cada uma dessas 6 colunas pertence a um dos 4 tipos: "e, f, g, h". De acordo com o princípio de Dirichlet, pelo menos duas das colunas pertencem ao mesmo tipo. Aplicando o julgamento do 2º caso para

essas duas colunas, obtemos os 4 quadrados pretos necessários.

6º Caso: algumas das 7 colunas são todas coloridas de Preto. Analisamos essa situação como no caso anterior. Todas situações foram analisadas, logo, o problema está resolvido!

5 Problemas propostos.

Por favor, dedique algum tempo para pensar sobre o problema antes de ler sua solução!

1. **(Stanford)**. Um professor de ciência da computação, estressado, consome pelo menos um café expresso todos os dias em um determinado ano, bebendo 500 no total. Prove que em alguma seqüência consecutiva de um dia inteiro, exatamente 100 expressos foram consumidos.

2. Escolha um conjunto "A" de 10 inteiros aleatórios entre 0 e 100. Então, prove que será possível fazer duas somas diferentes de elementos de "A" que são iguais.

3. **(Stanford)**. Um jogo de apostas é jogado preenchendo uma série de cartões de apostas. Cada vez que você preenche um cartão, você escolhe 4 números naturais variando de 1 a 16. Após preencher um certo número de cartões, você os entrega e a casa de aposta escolhe 4 dos números para serem "perdedores" aleatoriamente. Uma carta é vencedora se não tiver nenhum desses números de "perdedor". Prove que se você preencher 6 cartas, é sempre possível que nenhuma delas ganhe.

4. **(Stanford)**. Prove que se cada ponto em uma linha é pintado de verde ou branco, existem três pontos da mesma cor, de modo que um é o ponto médio do segmento de linha formado pelos outros dois.

5. **(Stanford).** Prove que em um coquetel com dez ou mais pessoas, há três conhecidos ou quatro estranhos em comum.

6. **(Lee Kau Yan Memorial School).** Determine todos os inteiros $n > 4$ de forma que seja possível colorir os vértices de um polígono regular de n lados usando no máximo 6 cores, de modo que quaisquer 5 vértices consecutivos tenham cores distintas.

7. Onze números são escolhidos de 1, 2, 3, ..., 99, 100. Mostre que há dois subconjuntos disjuntos, não vazios, desses onze números cujos elementos têm a mesma soma.

8. Suponha que nove pontos com coordenadas inteiras no espaço tridimensional sejam escolhidos. Mostre que um dos segmentos com pontos finais selecionados a partir dos nove pontos deve conter um terceiro ponto com coordenadas inteiras.

9. Mostre que entre quaisquer seis pessoas, ou há três que se conhecem ou há três, nenhuma das quais se conhecem mutuamente.

10. **(IMO Japão).** Em cada número de 16 dígitos, mostre que há uma sequência de um ou mais dígitos consecutivos, de forma que o produto desses dígitos seja um quadrado perfeito. [Dica: os expoentes de uma fatoração de um quadrado perfeito em números primos são pares. Verifique isso!]

11. Suponha que 51 números sejam escolhidos de 1, 2, 3, ..., 99, 100. Mostre que há dois que não têm nenhum divisor primo comum.

12. Suponha que 51 números sejam escolhidos de 1, 2, 3, ..., 99, 100. Mostre que há dois, de modo que um divide o outro.

13. Mostre que entre quaisquer nove números reais distintos, há dois, digamos a e b, de modo que:

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2}-1$$

14. **(Torneio das cidades - Moscou).** Em uma festa, n meninos e n meninas são pareados. Observa-se que em cada par, a diferença de altura é menor que 10cm. Mostre que a diferença na altura do k-ésimo menino mais alto e da k-ésima menina mais alta também é menor que 10cm para $k = 1, 2, \ldots, n$.

15. **(XLI Mathematical Olympiad in Poland).** Suponha que um triângulo possa ser colocado dentro de um quadrado de área unitária de maneira que o centro do quadrado não esteja dentro do triângulo. Mostre que um lado do triângulo tem comprimento menor que 1.

16. **(Queen's College)** Para $n > 1$, deixe $2n$ peças de xadrez serem colocadas em quaisquer $2n$ casas de um tabuleiro de xadrez n. Mostre que há 4 peças entre elas que formaram os vértices de um paralelogramo. (Observe que se $2n-1$ peças forem colocadas nos quadrados da primeira coluna e da primeira linha, então não há paralelogramo. então $2n$ é o melhor possível).

17. **(Putnam).** Cada ponto no plano é colorido de vermelho ou azul. Prove que não importa como a coloração é feita, deve haver dois pontos, exatamente a uma unidade de distância, que são da mesma cor.

18. **(A. Soifer, S . Slobodnik).** Quarenta e uma torres são colocadas em um 10×10 tabuleiro de xadrez. Prove que deve haver cinco torres, nenhuma das que se atacam. Lembre-se de que as torres atacam cada peça localizada em sua linha ou coluna!

19. **(Desafio de Paul Erdös - Polônia).** Seja n um número inteiro positivo. Escolha qualquer $(n+1)$ subconjunto de elementos de $\{1,2,...,2n\}$. Mostre que este subconjunto deve conter dois inteiros, um dos quais divide o outro.

20. **(Putnam).** Sejam A e B matrizes 2×2 com entradas inteiras tais que A, A + B, A + 2B, A + 3B e A + 4B são matrizes invertíveis cujas inversas têm números inteiros entradas. Mostre que A + 5B é invertível e que sua inversa tem entradas inteiras.

21. Seja S uma região no plano (não necessariamente convexa) com área maior do que o número inteiro positivo n. Mostre que é possível transladar S (ou seja, deslizar sem virar ou distorcer) de modo que S cubra pelo menos $n+1$ pontos da rede.

6 Dicas e soluções

1. Proceda como no exemplo 11. Use também os argumentos do exemplo 12.

2. Essa é uma aplicação direta do exemplo 12. Monte argumentos fortes!

3. Para fazer isso, encontre um conjunto de quatro membros que tenha pelo menos um elemento em comum com os seis conjuntos que representam as cartas. Se qualquer número aparecer em três cartas, isso é trivial, escolha aquele e um de cada conjunto. Se este não for o caso, deve haver 8 números

aparecendo em dois conjuntos e 8 aparecendo em um. Escolha um número aparecendo em dois conjuntos, então a união desses dois conjuntos é no máximo 7 números distintos. Assim, outro número pode ser escolhido em dois conjuntos diferentes e, em seguida, escolher um de cada um dos 2 conjuntos restantes.

4. Escolha dois pontos A, B da mesma cor. Seja C o ponto médio de AB e a posição D, E tal que C também seja o ponto médio de DE e DA = AB = BE. Se C, D, E são da mesma cor, então está feito; se não, pelo menos um deles é da mesma cor que A, B e forma um trio com A, B.

5. Considere uma pessoa A e as outras 9 pessoas na sala. Primeiro caso, suponha que A tenha pelo menos 4 conhecidos, então, se algum desses conhecidos se conhecer, teremos 3 amigos em comum. Se nenhum desses conhecidos se conhece, temos pelo menos quatro estranhos em comum, ou seja, os conhecidos de A. Considere o outro caso em que A tem mais de 5 estranhos (menos de 4 conhecidos). Então, considere a pessoa B no conjunto dos estranhos de A. B tem pelo menos 3 conhecidos ou 3 estranhos. Suponha que B tenha pelo menos 3 conhecidos, então nenhum desses conhecidos se conhece, caso contrário, temos 3 conhecidos mútuos. Mas, como A não conhece nenhuma dessas pessoas, os 3 conhecidos de B e A formam um grupo de 4 estranhos em comum. Por outro lado, se B tiver pelo menos 3 estranhos, então se todos esses estranhos se conhecerem, teremos 3 conhecidos mútuos. Assim, suponha que haja pelo menos 2 pessoas estranhas de B. que não se conheçam. Mas então teríamos essas 2 pessoas que não se conhecem, B e A como um grupo de estranhos em comum. Em todos os casos, obtemos três conhecidos mútuos ou quatro estranhos mútuos, conforme desejado.

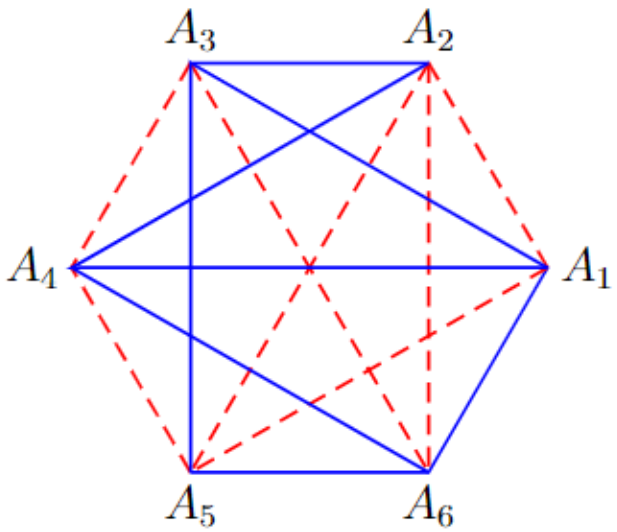
6. Sejam as cores a,b,c,d,e,f. Denote por S_1 a sequência a,b,c,d,e, por S_2 a sequência a,b,c,d,e,f. Se $n > 0$ é representável na forma $5x+6y$ para $x,y \geq 0$, então n satisfaz as condições do problema: podemos colocar x sequências S_1 consecutivas, seguidas por y sequências S_2 consecutivas, em torno do polígono. Definindo y igual a $0,1,2,3,4$, descobrimos que n pode ser igual a qualquer número na forma $5x$, $5x+6$, $5x+12$, $5x+18$, $5x+24$. Os únicos números maiores que 4 que não são desta forma são 7, 8, 9, 13, 14 e 19. Logo, mostraremos que nenhum desses números tem a propriedade necessária. Vefamos! Suponha como uma contradição que existe uma coloração para n igual a um de 7, 8, 9, 13, 14 e 19. Existe um

número k tal que $6k < n < 6(k+1)$. Pelo princípio de Dirichlet, pelo menos $k+1$ vértices do polígono de n lagos têm a mesma cor. Entre quaisquer dois desses vértices existem pelo menos 4 outros, porque quaisquer 5 vértices consecutivos têm cores diferentes. Portanto, existem pelo menos $5k+5$ vértices e $n \geq 5k+5$. No entanto, essa desigualdade falha para n = 7, 8, 9, 13, 14, 19, o que é uma contradição. Portanto, uma coloração é possível para todos $n \geq 5$, exceto 7, 8, 9, 13, 14 e 19.

7. O conjunto de onze números tem $2^{11} - 2 = 2046$ subconjuntos não vazios com menos de onze elementos, e a soma máxima dos elementos em qualquer um desses subconjuntos é 91 +92 + ... + 99 + 100 = 955. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, há dois subconjuntos não vazios com a mesma soma. Se eles tiverem elementos comuns, remova-os de ambos os subconjuntos e obteremos dois subconjuntos disjuntos não vazios com a mesma soma.

8. Para os nove pontos, cada uma das três coordenadas é par ou ímpar. Portanto, há $2^3 = 8$ padrões de paridade para as coordenadas. Pelo princípio da casa dos pombos, dois dos nove pontos devem ter os mesmos padrões de coordenada de paridade. Então, seu ponto médio deve ter coordenadas inteiras.

9. Deixe as seis pessoas corresponderem aos seis vértices de um hexágono regular. Se duas pessoas se conhecerem, pinte o segmento com os vértices associados de vermelho (linha pontilhada), caso contrário, de azul (linha contínua). Resolver o problema equivale a mostrar que existe um triângulo vermelho ou um triângulo azul. Formalizando temos A_j, com j = 1, 2, ...,6 representado com um dos vétices do hexágono regular. De fato, o problema equivale a provar que sempre existe um triângulo de lados contínuos ou um triângulo de lados pontilhados com vétice no conjunto $A = \{A_1, A_2, ..., A_6\}$. Veja figura abaixo. Temos, portanto, 5 segmentos (pombos) incidindo no vétice A_1, cada um deles contínuos ou pontilhado. Suponhamos que três são contínuos (caso contrário o raciocínio é análogo) e denotemos estes por A_1A_3, A_1A_4, e A_1A_6. Se algum dos segmentos A_3A_4, A_3A_6 ou A_4A_6 for contínuo então este segmento junto aos que se ligam com A_1 formam um triângulo de lados contínuos. Por outro lado, se nenhum deles for contínuo, então eles formam um triângulo de lados pontilhados, completando assim, a nossa demonstração.



10. Sejam $d_1, d_2, ..., d_{l6}$ os dígitos de um número de 16 dígitos. Se um dos dígitos dos dezesseis dígitos é 0 ou 1 ou 4 ou 9, então o problema está resolvido. Portanto, podemos assumir que cada um dos dígitos é 2, 3, 5, 6 = 2 x 3, 7 ou $8 = 2^3$. Seja $x_o = 1$ e x_i o produto de $d_1,\ d_2, ..., d_i$ for $i = 1, 2, ..., 16$. Agora, cada $x_i = 2^{p_i} \times 3^{q_i} \times 5^{r_i} \times 7^{s_i}$ ... for $i = 0, 1,\ 2, ..., 16$. Cada um dos $p_i,\ q_i,\ r_i,\ s_i$ é par ou ímpar. Os demais são $2^4 = 16$ padrões de paridade possíveis. Pelo princípio da casa dos pombos, os $p_i,\ q_i,\ r_i,\ s_i$ para dois dos dezessete x_i's, digamos x_j e x_k com $j < k$, deve ter o mesmo padrão de paridade. Então $d_j +_1 \times ... \times d_k = x_k/x_j$ é um quadrado perfeito.

11. Vamos considerar os 50 pares de números consecutivos (1, 2), (3, 4), ..., (99, 100). Uma vez que 51 números são escolhidos, o princípio da casa dos pombos nos diz que haverá um par $(k, k+l)$ entre eles. Agora, se um número primo p divide $k+1$ e k, então p dividirá $(k+1) - k = 1$, o que é uma contradição. Então, k e $k+1$ não têm divisor primo em comum.

12. Considere os 50 números ímpares 1, 3, 5, ..., 99. Para cada um, forme uma caixa contendo o número e todas as potências de 2 vezes o número. Portanto, a primeira caixa contém 1, 2, 4, 8, 16, ... e a próxima caixa contém 3, 6, 12, 24, 48, ... e assim por diante. Então, entre os 51 números escolhidos, o princípio da casa dos pombos nos diz que há dois que estão contidos na

mesma caixa. Eles devem ser da forma $2^m k$ e $2^n k$ com o mesmo número k. Então, um vai dividir o outro.

13. Com um pouco de álgebra podemos fazer uma analogia da expressão do meio com a fórmula $\tan(x-y)$. Portanto, precedemos da seguinte forma. Divida o intervalo $(-\pi/2,\ \pi/2]$ em 8 intervalos:

$$(-\pi/2, -3\pi/8],\ (-3\pi/8, -\pi/4],...,(\pi/4, 3\pi/8],\ (3\pi/8, \pi/2].$$

Sejam os números $a_1, a_2, ...a_9$, e sejam $x_i = \arctan(a_i)$, $i = 1, 2, ...9$. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, dois dos x_i's, digamos, x_j e x_k com $x_j > x_k$ devem estar em um dos 8 subintervalos. Temos $0 < x_j - x_k < \pi/8$, então $0 < \tan(x_j - x_k) = (a_j - a_k)/1 + a_j a_k) < \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$.

14. Sejam $b_1 \geq b_2 ... \geq b_n$ as alturas dos meninos, e $g_1 \geq g_2 ... \geq g_n$ as alturas das meninas. Suponha que para algum k, $|b_k - g_k| \geq 10$. No caso de $b_k - g_k \geq 10$ temos $b_i - g_j \geq 10$ para $1 \leq i \leq k$ e $k \leq j \leq n$. Considere os meninos de altura $\mathrm{b}_i (1 \leq i \leq k)$ e as garotas de altura $\mathrm{g}_j (\mathrm{k} \leq j \leq n)$. Pelo princípio da casa dos pombos, dois desses $(n+1)$ devem ser emparelhados originalmente. No entanto $b_i - g_j \leq 10$, fato que contradiz a hipótese. (O caso $g_k - b_k \leq 10$ é tratado de forma similar). Então $|b_k - g_k| < 10$ para todo k.

15. Através do centro C do quadrado, desenhe uma linha L_1 paralela ao lado mais próximo do triângulo e uma segunda linha L_2 perpendicular a L_1 em C. As linhas L_1 e L_2 dividem o quadrado em quatro quadriláteros congruentes. Como C não está dentro do triângulo, o triângulo pode estar em no máximo dois quadriláteros (adjacentes). Pelo princípio do buraco do pombo, dois dos vértices do triângulo devem pertencer ao mesmo quadrilateral. Agora, a maior distância entre dois pontos no quadrilátero é a distância entre dois de seus vértices opostos, que é no máximo 1. Portanto, o lado do triângulo com dois vértices situados no mesmo quadrilátero deve ter comprimento inferior a 1.

16. Seja m o número de linhas com pelo menos 2 peças. (Cada uma das $n-m$ linhas restantes contém no máximo 1 peça.) Para cada uma dessas m linhas, localize o quadrado mais à esquerda que contém uma peça. registre as distâncias (ou seja, o número de quadrados) entre esta peça e as outras peças na mesma linha. As distâncias podem ser apenas $1,\ 2,\ 3...n-1$ porque existem n colunas. Uma vez que o número de peças nessas m linhas no total

é de pelo menos $2n-(n-m)=n+m$, há pelo menos $(n+m)-m=n$ distâncias registradas no total para essas m linhas. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos duas dessas distâncias são iguais. isso significa que há pelo menos duas filas, cada uma contendo 2 peças com a mesma distância. Essas quatro peças produzem um paralelogramo.

17. Escolha um ponto, qualquer ponto! Sem perda de generalidade, é vermelho. Desenhe um círculo de raio de uma unidade com este ponto como centro. Se algum ponto na circunferência deste círculo for vermelho, estamos então está ok! Se todo os pontos são azuis, ainda estaremos ok, pois podemos encontrar dois pontos na circunferência que estão a uma unidade de distância (por quê?). Isso não foi difícil, mas não era a solução ideal. Considere isto: apenas imagine os vértices de um triângulo equilátero com comprimento lateral de uma unidade. Tem três vértices, mas apenas duas cores disponíveis. O princípio da casa dos pombos nos diz que dois dos vértices devem ser da mesma cor!

18. Quando você vê o número 41 justaposto com 10, você suspeita que o princípio do escaninho pode estar envolvido, uma vez que 41 é apenas um a mais do que 4×10. Uma vez sintonizados com o princípio do escaninho, não podemos deixar de notar que: $\lceil 41/10\rceil = 5$. Isso é encorajador, pois este é o número de torres que procuramos. Claro que isso não é uma solução, mas sugere que investiguemos cuidadosamente uma, usando o princípio da casa dos pombos. Vamos fazer isso. Procuramos cinco torres que não se ataquem. Duas torres não se atacam se estiverem localizados em linhas e colunas diferentes. Então precisamos encontrar cinco torres, cada uma vivendo em uma fileira diferente e cada uma em uma coluna diferente. Uma estratégia vaga: precisamos de cinco fileiras diferentes, cada uma com "lotes" de torres. Então, poderíamos escolher uma torre de uma linha, encontrar outra torre em uma coluna diferente na outra linha, etc. Existem 10 linhas e 41 torres, então o princípio do escaninho nos diz que uma linha deve conter pelo menos $\lceil 41/10\rceil = 5$ torres. Isso é um começo. Podemos aplicar o escaninho princípio novamente para obter mais informações? Sim ! O que está acontecendo com as outras linhas? Queremos encontrar outras linhas que tenham muitas torres. Isolamos uma linha em pelo menos cinco torres. Agora remova-o! No máximo, removeremos 10 torres. Isso deixa 31 torres nas nove filas restantes. O princípio do escaninho (casa dos pombos) nos diz que uma dessas nove linhas devem conter pelo menos

$\lceil 31/9 \rceil = 4$ torres. Agora estamos indo bem. Removendo essa linha e "classificando" mais uma vez, nós deduzimos que há outra linha contendo pelo menos $\lceil 21/8 \rceil = 3$ torres. Continuando (verifique!), vemos que outra linha deve ter pelo menos duas torres e mais uma linha deve conter pelo menos uma torre.
Portanto, existem cinco linhas especiais no tabuleiro de xadrez, contendo pelo menos 5, 4, 3, 2 e 1 torres, respectivamente. Agora podemos construir o "quíntuplo pacifista": comece escolhendo a torre na linha que tenha pelo menos uma torre. Então vá para a linha com pelo menos duas torres. Pelo menos uma dessas torres não estará na mesma coluna que nossa primeira torre, então selecione-a como a segunda torre. Em seguida, olhe para a linha que tem pelo menos três torres. Uma dessas três torres não vive na mesma coluna que a primeira ou a segunda torre. Selecione esta como nossa terceira torre, etc. , e pronto!

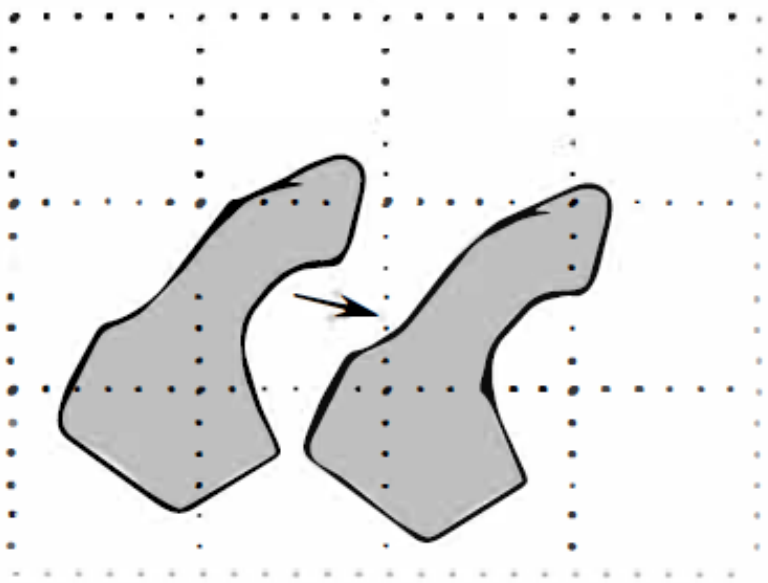
19. De fato, a dificuldade está nas casas (escaninhos) e não nos pombos! A linguagem do problema nos leva a tentar o princípio da casa dos pombos, fixando os números $n+1$ no subconjunto escolhido como os pombos. Precisamos criar no máximo n escaninhos, pois há $n+1$ pombos. E nós queremos nossos escaninhos escolhido de forma que se dois números habitarem o mesmo buraco, então um deles deve dividir o outro. Cada escaninho, então, é um conjunto de inteiros com a propriedade de que se a e b são quaisquer dois elementos do conjunto, ou a é um múltiplo de b ou b é um múltiplo de a. Vamos tentar construir esse conjunto. Se o conjunto contém 7, então todos os outros números devem ser fatores de 7 ou múltiplos de 7. Digamos que o próximo número no conjunto seja 2 1. Então, os outros números agora devem ser múltiplos de 21 ou fatores de 7, etc; 7 é o menor número do conjunto, o conjunto seria uma lista de números da seguinte forma: $7, 7a, 7ab, 7abc, 7abcd, ...$ onde a, b, c, d, etc. são inteiros positivos. Nossa tarefa, então, é particionar o conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ em no máximo n subconjuntos disjuntos com a propriedade acima. Isso não é fácil; a melhor coisa a fazer neste ponto é experimente com pequenos valores de n. Por exemplo, seja n = 5. Vamos tentar particionar $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1O\}$ em cinco subconjuntos disjuntos com a propriedade especial. Cada conjunto tem o menor elemento, então precisamos escolher cinco dessas "sementes". Na busca de um método geral (aquele que pode ser usado para outros valores de n) a única coleção "natural" de cinco sementes é 1, 3, 5, 7, 9. A lista 2, 4, 6, 8, 10 não inclui 1, e 1 tem que ser o elemento mínimo de um dos

conjuntos, portanto, esta lista não é um candidato "natural" para o nossas sementes!
Observe que cada semente é ímpar. Para obter os números restantes, só temos que multiplicar as sementes por 2. Mas isso não funcionará muito bem, pois não obteremos todos os números. Se continuarmos multiplicando, porém, obteremos a partição: $\{1,2,4,8\}$; $\{3,6\}$; $\{5,10\}$; $\{7\}$; $\{9\}$. Se escolhermos quaisquer seis números de $\{1,2,...,10\}$, então, dois deles devem estar contidos em um dos cinco conjuntos acima. Alguns dos conjuntos (e neste caso, apenas dois) contêm apenas um elemento, então os dois números que "coabitam" com um conjunto não podem estar nesses conjuntos. Portanto, os dois coabitantes devem viver em $\{1,2,4,8\}$ ou $\{3,6\}$ ou $\{5,10\}$, e então terminamos, pois então um dos dois coabitantes é um múltiplo do outro (são primos entre si). Agora é fácil resolver o problema em geral. Vejamos.
Solução formal: Cada elemento de $\{1,2,...,2n\}$ pode ser escrito exclusivamente na forma $2^r q$, onde q é um número inteiro ímpar e r é um número inteiro não negativo. Cada diferente número ímpar q define um escaninho, ou seja, todos os elementos de $\{1,2,...,2n\}$ que tem a forma $2^r q$ para algum inteiro positivo r. Por exemplo, se $n = 100$, então $q = 11$ definiria o escaninho $\{11,22,44,88,176\}$. Uma vez que existem exatamente n números ímpares entre 1 e $2n$, definimos n conjuntos, e esses conjuntos são disjuntos (eles precisam ser disjunto; caso contrário, eles não podem ser "escaninhos".) Então, terminamos, pois pelo princípio do escaninho, dois dos $n+1$ números estarão em um de nossos n conjuntos, que irão forçar um dos dois números a ser um múltiplo do outro.

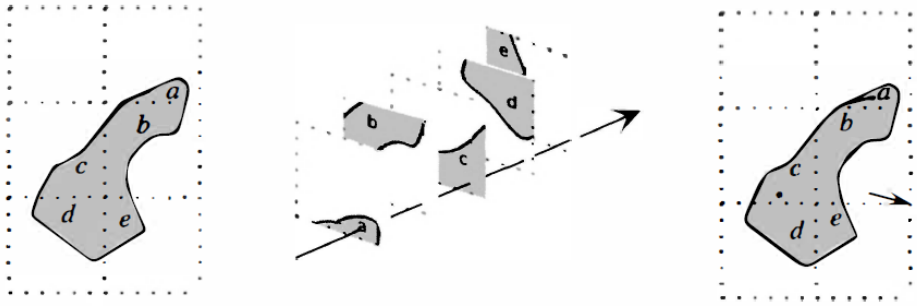
20. Se X é uma matriz invertível com entradas inteiras e seu inverso também tem entradas inteiras, então detX = 1. Isso decorre do fato de que detX e det(X^{-1}) são ambos inteiros e det (X^{-1}) = 1/detX. E, inversamente, se o determinante de uma matriz com entradas inteiras é 1, o inverso também terá entradas inteiras (por quê?). Agora defina a função $f(t)$: = det($A+tB$). Uma vez que A e B são matrizes (2x2) com entradas inteiras, $f(t)$ é um polinômio quadrático em t com coeficientes inteiros (verifique!). Uma vez que A, A + B, A + 2B, A + 3B e A + 4B são todas matrizes invertíveis cujos inversos têm entradas inteiras, sabemos que os cinco números: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Assumem apenas os valores 1 ou -1. Pelo princípio do escaninho (casa dos pombos), pelo menos três destes números devem ter o mesmo valor; sem perda de generalidade, suponha que seja 1. Então o

polinômio quadrático $f(t)$ é igual a 1 quando três números diferentes são inseridos para t. Isso significa que $f(t)$ deve ser um polinômio constante; ou seja, $f(t) = 1$. Portanto det(A + 5B) = $f(5) = 1$, então A + 5B é invertível e sua inversa tem entradas inteiras!

21. Vejamos um exemplo abaixo. A região S possui área de 1,36 unidades. No início, S cobre apenas um ponto da rede, mas é possível transladá-lo para baixo e para a direita de modo que cubra dois pontos da rede.



Como desenvolver um argumento geral? Vamos inventar um algoritmo que nos permitirá aplicar ao nosso exemplo na região S, mas que funcionará para qualquer região. Nosso algoritmo tem várias etapas. Vejamos.



1. Primeiro, pegue S e decomponha-o em um número finito de sub-regiões, cada uma situada em seu próprio quadrado (treliça). Em nosso exemplo, S se divide nas cinco regiões a, h, c, d, e.// 2. Em seguida, "eleve" cada região, com seu quadrado de treliça. Pense em cada região como uma imagem desenhada em um quadrado unitário. Empilhe esses quadrados em uma pilha, como mostrado. Agora imagine que colocamos um alfinete através dos quadrados, de modo que o alfinete perfure cada quadrado no mesmo lugar. Como a área de S é maior que 1, deve ser possível encontrar um ponto tal que o pino através desse ponto perfure pelo menos duas sub-regiões. Em nosso exemplo, o pino perfura os pontos a e c. Então a área total de S seria menor ou igual à área de um único quadrado unitário. Outra maneira de pensar nisso: imagine cortar as sub-regiões com uma tesoura e tentando empilhá-los todos em um quadrado unitário, sem qualquer sobreposição. Seria impossível, uma vez que a área total é maior que 1. (Pelo mesmo raciocínio, se a área total fosse maior que o inteiro n, seria possível encontrar um ponto onde o pino perfura pelo menos $n+1$ sub-regiões).
3. Finalmente, rastreamos o ponto onde nosso pino perfurou as sub-regiões, e reconstruimos S. Os pontos são indicados com pontos pretos, confome mostrado na figura. Uma vez que os dois pontos são localizado exatamente no mesmo lugar em relação às linhas de rede, agora é possível para deslizar S (na direção da seta), de modo que ambos os pontos brancos fiquem em pontos de rede, e pronto!

7 Referências

DIRICHLET PRINCIPLE Part II Theory, Examples, Problems Experimental Training Material Translated from Latvianby M. Kvalberga.

35th International Mathematical Olympiad

Iniciação à Matemática, Krerley Oliveira e Adán J. Corcho. Profmat.

Abramo Hefez, Álgeba: elementos de aritmética.

MATHEMATICS COMPETITIONS, V.32, n° 1 and 2019.

Combinatorics and Graph theory, John M. Harris.