POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE

Ramyro Corrêa

1 Introdução

O Polinômio Interpolador de Lagrange é uma ferramenta que nos permite determinar um polinômio P de grau menor ou igual a n dados $n+1$ valores quaisquer de P. Isso é muito útil em problemas que pedem para provar alguma identidade polinomial, por exemplo, pois o Polinômio Interpolador de Lagrange nos dá uma fórmula explícita para P e garante a sua unicidade. Vejamos o teorema:

2 O Polinômio Interpolador de Lagrange

- **Polinômio Interpolador de Lagrange:** Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reais distintos dois a dois, e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais arbitrários. Então, existe um único

polinômio P de coeficientes reais com grau menor ou igual a n tal que $P(x_i) = a_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$, dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Prova: Observe que, por construção, $P(x_i) = a_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$, e que P possui grau menor ou igual a n, já que cada parcela

$$\prod_{0 \leq j \neq i \leq n} (x - x_j)$$

possui grau menor ou igual a n, pois não consideramos $i = j$. Para provar a unicidade, observe que se existir outro polinômio Q tal que $Q(x_i) = a_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$, então o grau de Q é no máximo n. Portanto, P e Q são dois polinômios com grau menor ou igual a n que coincidem em $n + 1$ valores, então o polinômio $R(x) = P(x) - Q(x)$, que também possui grau menor ou igual a n, possui mais do que n raízes, portanto R é identicamente nulo. Logo $P(x) = Q(x) \quad \forall x \in R$, absurdo por suposição, o que implica que P é, de fato, único.

3 Exemplos

3.1 Exemplo 1

(Reino Unido) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números inteiros positivos distintos dois a dois. Prove que para todo inteiro positivo k, o número

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

é um inteiro.

Solução: Primeiramente, é possível tentamos usar o Polinômio Interpolador de Lagrange para o polinômio $f(x) = x^k$. Porém, se k for maior ou igual a n, podemos ter alguns problemas com isso. Felizmente, isso pode ser contornado quando tomamos o resto de f módulo $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) = g(x)$, que é um polinômio t com grau no máximo $n - 1$. Portanto, seja $f(x) = g(x)h(x) + t(x)$. Agora não precisamos nos preocupar, já que a fórmula funciona e

$$t(x) = \sum_{i=1}^{n} t(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Veja que, dessa forma, $t(a_i) = a_i^k$ e t possui coeficientes inteiros, pois f e g são ambos mônicos de coeficientes inteiros. Além disso, o coeficiente de x^{n-1} em t é, precisamente, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$. Logo, como t possui coeficientes inteiros, temos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$ é, obrigatoriamente, inteiro, como desejávamos provar.

3.2 Exemplo 2

(IMO SL 2019 A5) Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais distintos. Prove que a expressão

$$\sum_{1\leq i\leq n} \prod_{1\leq j\neq i\leq n} \frac{1-x_i x_j}{x_i - x_j}$$

é igual a 0, se n é par, e é igual a 1, se n é ímpar.

Solução: Seja S o valor da expressão. Seja $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(1-xx_i)$. Pelo Polinônimo Interpolador de Lagrange nos valores $x_1, x_2, ..., x_n, 1, -1$, temos que

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \frac{(x^2-1)}{(x_i^2-1)} \prod_{j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} + \frac{P(1)}{2}(x+1)\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-x_j)}{(1-x_j)} + (-1)^{n+1}\frac{P(-1)}{2}(x-1)\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-x_j)}{(1+x_j)}$$

Além disso, como o grau de P é igual a n, temos que o coeficiente de X^{n+1} na expressão acima é exatamente igual a 0. Portanto,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{x_i^2-1} \prod_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{P(1)}{2\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)} + (-1)^{n+1}\frac{P(-1)}{2\prod_{j=1}^{n}(1+x_j)}$$

Logo, como $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(1-xx_i), P(1) = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ e $P(-1) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$, então

$$0 = -S + \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\frac{1}{2}$$

Portanto, $S = 0$ se n é par e $S = 1$ se n é ímpar, como desejado.

3.3 Exemplo 3

(Folclore) Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$. Prove que para qualquer número real não-nulo h e qualquer número real A, nós temos que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n=k} \binom{n}{k} f(A+kh) = a_0.n!.h^n$$

Solução: Observe que o grau de f é no máximo n, então podemos utilizar o Polinômio Interpolador de Lagrange. Logo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(A+kh) \prod_{j\neq k} \frac{x-A-jh}{(k-j)h}$$

Igualando os coeficientes líderes na equação acima, temos que

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n} f(A+kh) \frac{1}{\prod_{j\neq k}(k-j)h} = \frac{1}{n!h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(A+kh),$$

como queríamos provar.

4 Problemas

Nos problemas a seguir, tente usar o Polinômio Interpolador de Lagrange de forma semelhante aos exemplos mostrados.

Problema 1: Prove a identidade

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}=\frac{n(n+1)!}{2}$$

Problema 2: Prove que para quaisquer números reais $x_1,x_2,...,x_n \in [-1,1]$, a seguinte desigualdade é válida:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{j\neq i}|x_j-x_i|}\geq 2^{n-2}$$

Problema 3: Seja f um polinômio mônico de coeficientes reais com grau n, e sejam $x_0<x_1<...<x_n$ inteiros. Prove que existe $k\in\{0,1,...,n\}$ tal que $|f(x_k)|\geq\frac{n!}{2^n}$.

Problema 4: Um polinômio p de grau n satisfaz $p(k)=2^k$ para todo $k=0,1,...,n$. Encontre o valor de $p(n+1)$.

Problema 5: Prove que se m e n são inteiros satisfazendo $1<m<n$, então

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^m\binom{n}{k}=0.$$

Problema 6: Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(k)=\frac{k}{k+1}$ para todo $k=0,1,...,n$, determine $P(n+1)$,

Problema 7: Seja $f(x)$ um polinômio mônico de grau $n-1$ e $a_1,a_2,...,a_n$ números reais distintos. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}=1.$$

5 Bibliografia

- https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/algebra3/Aula10-DiferencasFinitaseInterpolacaodePolinomi
- https://artofproblemsolving.com/community/c6h2279006p17828803
- Problems From the Book, by Titu Andreescu and Gabriel Dospinescu