Rotação no Plano em torno de um Ponto

Arthur Fernandes

1 Introdução

Fazer uso de transformações no plano que preservam a distância euclidiana, isto é, de isometrias, costuma ser uma boa ideia na resolução de problemas de geometria por meio de ferramentas básicas. Um exemplo de isometria é a rotação no plano. Se bem utilizada, esta técnica é capaz de fornecer soluções sintéticas para uma gama de problemas, essencialmente por "transportar" medidas convenientes para se obter informações relevantes.

2 Rotação no Plano

2.1 Definição

Sejam O um ponto tomado no plano π e α um ângulo de vértice O. A rotação de α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \pi \to \pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano π tal que:

$$XO = X'O \text{ e } \angle XOX' = \alpha.$$

Para a rotação estar bem definida, deve-se considerar o ângulo α orientado. A orientação positiva é adotada no sentido anti-horário. O ponto O é chamado de centro de rotação.

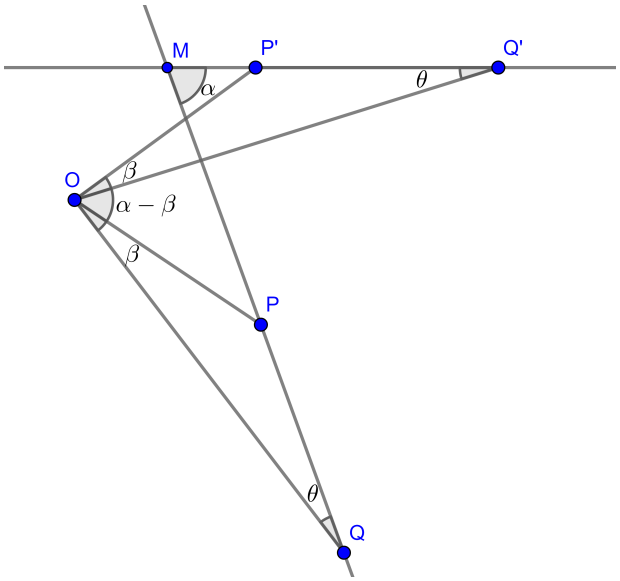
Em suma, ao aplicarmos a função rotação no plano, cada ponto distinto do centro se desloca segundo um arco de círculo cujo centro coincide com o centro de rotação.

2.2 Teorema

Sejam O um ponto fixo no plano π e α um ângulo de vértice O. Sejam ainda P e Q pontos do plano π distintos de O e P' e Q' suas respectivas imagens pela rotação de centro O e ângulo α. Então, $PQ = P'Q'$ e o ângulo formado pelas retas PQ e $P'Q'$ é α.

Prova. Observe que os triângulos OPQ e $OP'Q'$ são congruentes, uma vez que $\angle QOP = \angle QOQ' - \angle POQ' = \angle POP' - POQ' = \angle Q'OP'$, $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$. Logo, $PQ = P'Q'$ e $\rho_{O,\alpha}$ é, de fato, uma isometria.

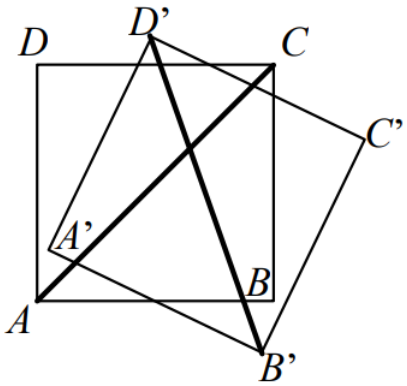
Prolongue $P'Q'$ até intersectar o prolongamento de PQ no ponto M. O quadrilátero $MQ'QO$ é cíclico, pois $\angle MQO = \angle MQ'O$ e, portanto, $\angle QMQ' = \angle QOQ' = \alpha$.



3 Problemas Resolvidos

3.1 Problema 1

(OBM 2009 - 1ª fase - Nível 3) Na figura, o quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado $ABCD$ de 25 graus em torno do ponto médio de AB. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas AC e $B'D'$?



A) 5 B) 25 C) 45 D) 65 E) 85

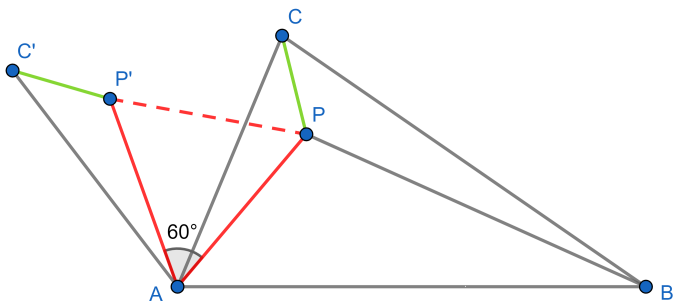
Solução. De acordo com o teorema anterior, o ângulo entre $B'D'$ e BD é $25°$. Como as retas AC e BD (diagonais do quadrado $ABCD$) são perpendiculares entre si, então o ângulo entre AC e $B'D'$ é igual a $180° - (90° + 25°) = 65°$ (letra D).

3.2 Problema 2

(Ponto de Fermat) Em um dado triângulo ABC qualquer, determine um ponto P no seu interior tal que $PA+PB+PC$ seja mínimo.

Solução. 1° caso: Suponha que os ângulos internos de ABC são menores que 120°.

Seja P um ponto arbitrário do interior de ABC. A rotação do triângulo APC de um ângulo de $+60^\circ$ em torno do ponto A resulta no triângulo $AP'C'$ congruente ao triângulo APC. Note que o valor mínimo para soma $PA+PB+PC$ é justamente a medida do segmento $C'B$. Isto ocorre quando os pontos C', P', P e B estão alinhados, ou seja, quando $\angle APB$ e $\angle AP'C' = \angle APC$ medem $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



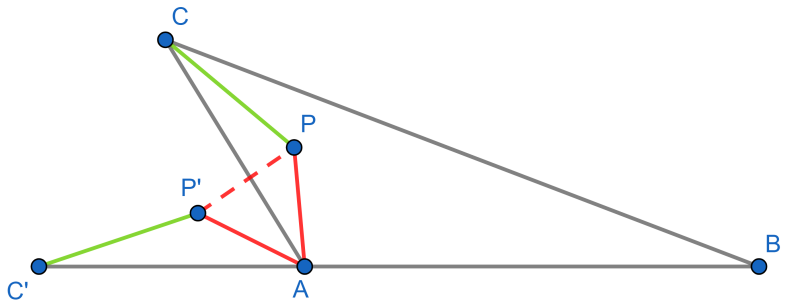
Para determinarmos P, trace AM perpendicular ao segmento $C'B$ a partir A. Daí, basta tomar o ponto P em $C'B$ tal que $\angle MAP = 30^\circ$.

2° caso: Admita que $\angle BAC \geqslant 120^\circ$.

Seja P um ponto arbitrário do interior de ABC distinto de A. Rotacione o triângulo APC em torno de A (gerando $AP'C'$) de sorte que B, A e C' sejam colineares. Assim, $\angle PAP' \leqslant 60^\circ$ e $P'P \leqslant PA$. Segue que

$$PA+PB+PC \geqslant PP'+PB+P'C' > C'B = C'A+AB = AB+AC.$$

Logo, é absurdo supor que P e A não são coincidentes.



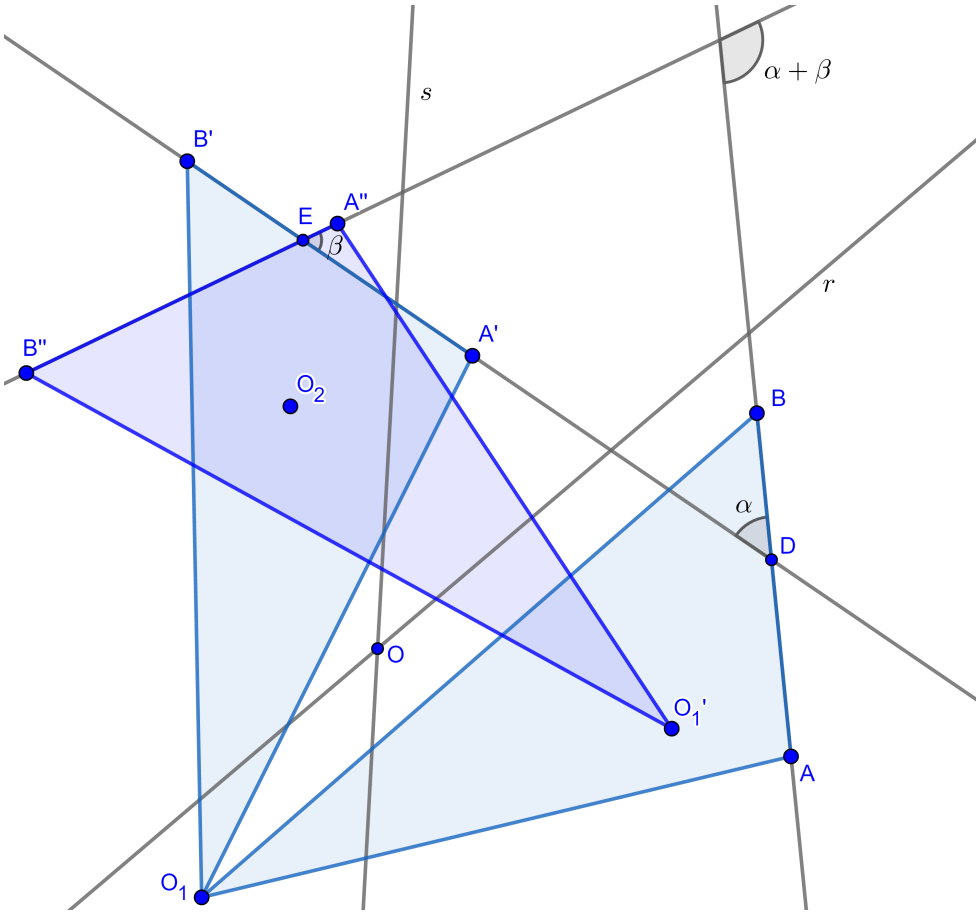
3.3 Problema 3

Prove que a composição de duas rotações no mesmo sentido de ângulos α e β, respectivamente, é uma rotação de ângulo de medida $\alpha+\beta$. Se os centros das duas rotações forem diferentes, determine o centro da nova rotação.

Solução. Sejam $A'B'$ o segmento obtido a partir de AB por uma rotação com centro O_1 e ângulo de rotação α e $A''B''$ o segmento obtido a partir de $A'B'$ por uma rotação (no mesmo sentido) com centro O_2 e ângulo β. Em particular, se $O_2 \equiv O_1$, é imediato que estas duas rotações são equivalentes a uma única rotação com centro O_1 e ângulo $\alpha+\beta$.

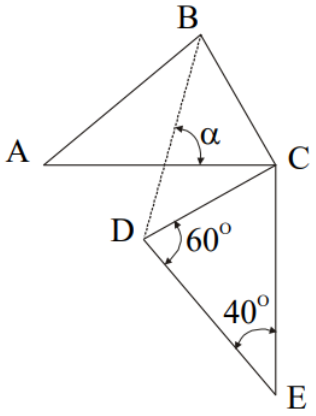
Caso contrário, temos, pelo teorema da seção anterior, que $\angle B'DB = \alpha$ e $\angle A'EA'' = \beta$ (vide figura abaixo). Dessa forma, o ângulo formado pelas retas AB e $A''B''$ vale $\alpha + \beta$. Concluímos, então, que existe uma rotação com centro em um ponto O a qual leva AB até $A''B''$ e que tais segmentos estão relacionadas por uma rotação, se $\alpha + \beta \neq 360°$ (e por uma translação se $\alpha + \beta = 360°$).

Mostraremos a seguir como encontrar o centro da rotação que transforma o segmento AB diretamente no segmento $A''B''$. Suponha inicialmente que $\alpha + \beta \neq 360°$. Nesse caso, já sabemos que a soma das duas rotações é uma rotação com ângulo igual a $\alpha + \beta$. Como O é o centro da "rotação resultante", $OA = OA''$ e $OB = OB''$. Em outras palavras, O é o ponto de intersecção das mediatrizes de AA'' (reta r) e de BB'' (reta s).



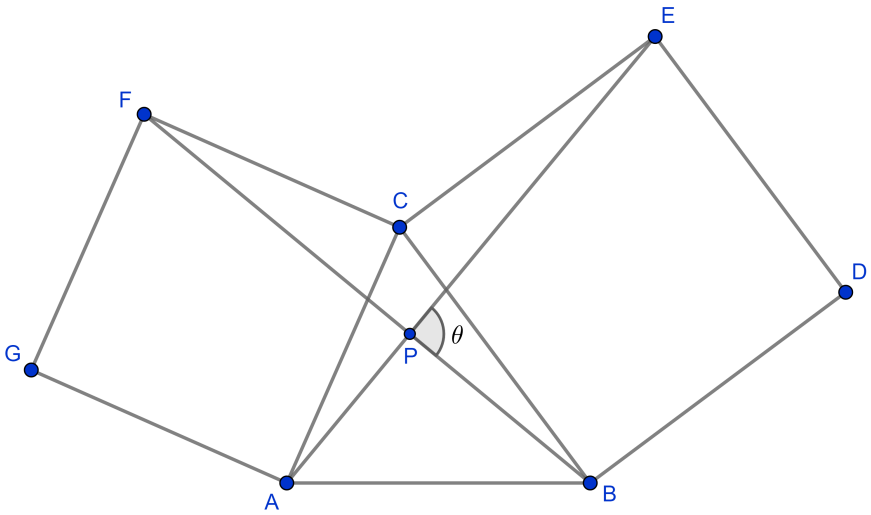
4 Exercícios Propostos

1. (OBM 2001 - 1ª fase - Nível 3) O triângulo CDE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de $90°$ no sentido anti-horário ao redor de C, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:

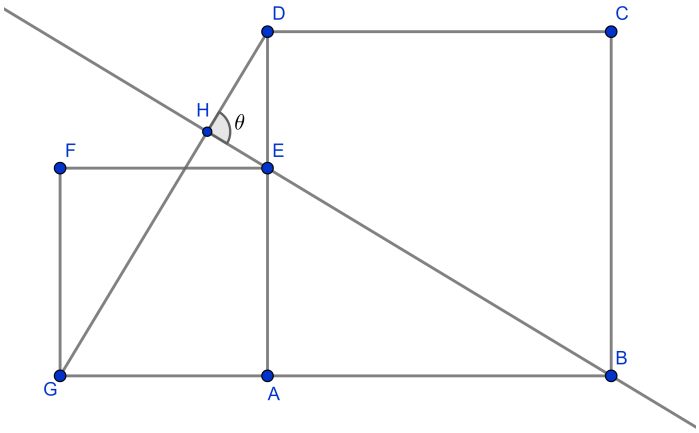


A) 75° B) 65° C) 70° D) 45° E) 55°

2. Sejam $ACFG$ e $BCED$ quadrados sobre os lados AC e BC, respectivamente, de um triângulo ABC qualquer. Encontre θ.



3. Os quadrados $ABCD$ e $AEFG$ são dispostos lado a lado, como mostra a figura. Calcule o valor do menor ângulo formado pelas retas que contêm os segmentos EB e GD.



4. Seja P o ponto de Fermat do triângulo ABC, cujos ângulos internos são menores que $120°$. Sobre os lados deste triângulo são construídos externamente os triângulos equiláteros ABF, ACE e BCD. Prove que:

   (a) os círculos circunscritos aos triângulos equiláteros passam por P;

   (b) as retas AD, BE e CF interceptam-se em P;

   (c) $AD = BE = CF = PA + PB + PC$.

5. (Teorema de Napoleão) Externamente aos lados de um triângulo ABC qualquer são construídos triângulos equiláteros. Mostre que os centros desses triângulos equiláteros são vértices de outro triângulo equilátero.

6. (Teorema de Thébault) Externamente aos lados de um paralelogramo $ABCD$ qualquer são construídos quadrados. Prove que os centros desses quadrados são vértices de outro quadrado.

7. (Corda Quebrada De Arquimedes) São dados os pontos A, B e C sobre a circunferência Γ, tais que $AB > AC$. Marca-se o ponto médio M do arco BC que contém A e o pé da perpendicular N baixada de M relativa ao lado AB. Prove que $BN = AN + AC$.

8. Considere um triângulo equilátero ABC inscrito em um círculo Γ e seja P um ponto sobre o menor arco BC de Γ. Prove que $PB + PC = PA$.

9. Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC, construímos triângulos os equiláteros BCA_1, ACB_1 e ABC_1, tais que os vértices A_1 e A estão sobre lados opostos de BC, B_1 e B estão sobre lados opostos de AC e C_1 e C estão sobre o mesmo lado de AB. Seja M o centro do triângulo ABC_1. Prove que $MA_1 = BM_1$ e $\angle B_1MA_1 = 120°$.

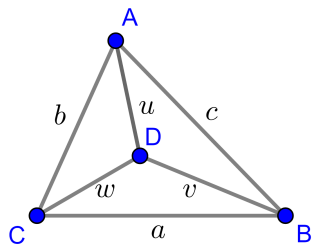
10. (IMO - 1975) Externamente aos lados de um triângulo ABC qualquer são construídos os triângulos ABR, BCP e CAQ com $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$ e $\angle ABR = \angle BAR = 15°$. Prove que $\angle QRP = 90°$ e que $QR = PR$.

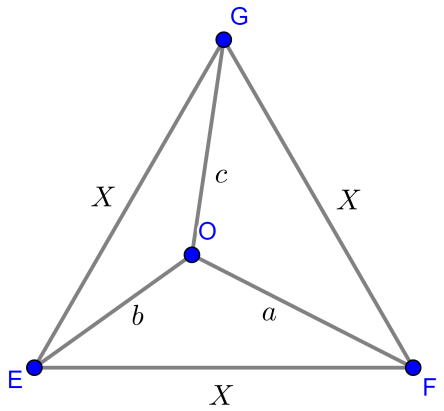
11. (Banco de Questões OBMEP 2011) Seja P um ponto no interior de um quadrado $ABCD$ tal que $PA = 1$, $PB = 2$ e $PC = 3$. Calcule $\angle APB$.

12. (I Olimpíada Iberoamericana de Matemática, 1985 - Villa de Leyva, Colômbia) Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC tal que $PA = 5$, $PB = 7$ e $PC = 8$. Determine a medida dos lados do triângulo ABC.

13. (Banco de Questões OBMEP 2008) Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Determine a medida dos lados do triângulo ABC.

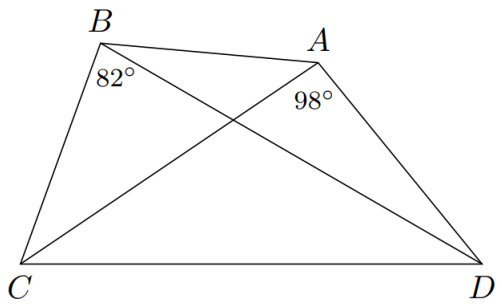
14. (USAMO) Os triângulos ABC e EFG, mostrados na figura abaixo, são tais que $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120°$. Prove que $X = u + v + w$.





15. Seja E um ponto do interior do quadrado $ABCD$ tal que $\angle EAD = \angle EDA = 15°$. Calcule $\angle EBC$.

16. (HMMT) No quadrilátero $ABCD$, $\angle DAC = 98°$, $\angle DBC = 82°$, $\angle BCD = 70°$ e $BC = AD$. Ache $\angle ACD$.



17. Considere um triângulo ABC isósceles cujos ângulos internos são $\angle BAC = 20°$ e $\angle ABC = \angle ACB = 80°$.

    (a) Prove que $AC < 3 \cdot BC$;

    (b) Seja D um ponto sobre o lado AC tal que $AD = BC$. Calcule $\angle BDC$.

18. Seja ABC um triângulo cujo ângulo $\angle BAC$ mede $100°$. Seja D um ponto sobre o lado AB tal que $AD = AC$ e $CD = AB$. Qual o valor de $\angle BCD$?

5 Dicas e Soluções

1. Sabemos que $BC = DC$. Como $\angle BCD = 90°$, temos $\angle DBC = \angle CDB = 45°$ (já que BCD é isósceles). Além disso, $\angle BAC = \angle CED = 40°$ e $\angle ABD = \angle CDE - \angle CBD = 60° - 45° = 15°$. Logo, $\alpha = \angle ABD + \angle BAC = 15° + 40° = 55°$ (letra E).

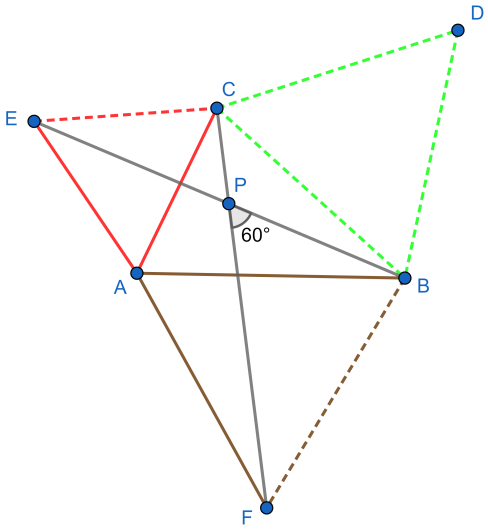
2. Observe que $FC = AC$, $BC = EC$ e $\angle BCF = \angle ACE$. Logo, $FCB \equiv ACE$ (LAL) e, por isso, a rotação de $+90°$ do triângulo FCB em torno de C resulta no triângulo ACE. Pelo teorema da seção 2, temos, então, $\theta = 90°$.

3. Inicialmente, temos que $AD = AB$, $AG = AE$ e $\angle DAG = \angle BAE = 90°$. Assim, $ADG \equiv ABE$ (LAL) e, dessa forma, o triângulo ABE pode ser obtido pela rotação de $-90°$ do triângulo ADG em torno do ponto A. Pelo teorema da seção 2, segue que $\angle EHD = 90°$.

4. A rotação de $+60^\circ$ em torno de A transforma o triângulo AFC no triângulo ABE e, logo, $CF = EB$. Em outras palavras, $AFC \equiv ABE$ pelo caso LAL, já que $\angle FAC = \angle BAE = 60^\circ + \angle BAC$. De modo semelhante, podemos concluir que $CEB \equiv CAD$ e que $BDA \equiv BCF$, donde $CF = EB = AD$. Isto prova parte de (c).

   Para demonstrar (a), considere o ponto R de intersecção de FC com EB. Pelo Teorema da seção 2, temos que $\angle BRF = \angle CRE = 60^\circ$. Desse modo, $\angle BRF = \angle BAF$ e $\angle CRE = \angle CAE$ e, assim, os quadriláteros $RCEA$ e $RAFB$ são inscritíveis. Por isso, $\angle ARF = \angle ABF = 60^\circ$ e $\angle ERA = \angle ECA = 60^\circ$. Dessa maneira, $\angle BRA = \angle ARC = 120^\circ$ e, portanto, $R \equiv P$. Além disso, o quadrilátero $PBDC$ também é inscritível, pois $\angle BDC + \angle CPB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. Portanto, os círculos circunscritos aos triângulos BDC, CEA e AFB têm o ponto P em comum.

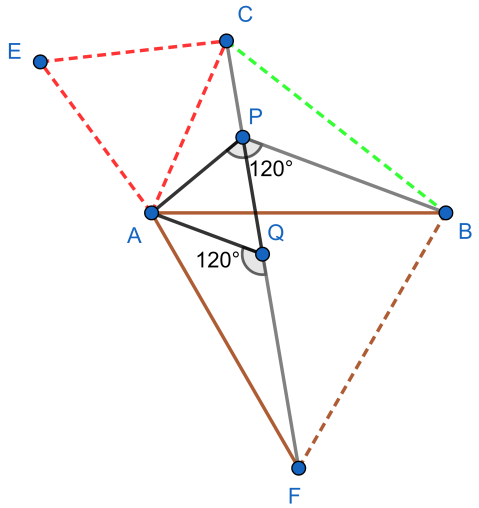
   Ademais, $\angle CPD = \angle CBD = 60^\circ$ e, por conseguinte, $\angle APC + \angle CPD = 180^\circ$ e verifica-se (b).



   Por fim, tomando o ponto $Q \in PF$ com $PQ = PA$, obtém-se o triângulo equilátero AQP. Então, o triângulo ABP é a imagem do triângulo AFQ por uma rotação de $+60^\circ$ em torno de A. Sendo assim, $QF = PB$ e tem-se:

$$PA + PB + PC = PQ + QF + PC = FC,$$

   o que finaliza a prova de (c).



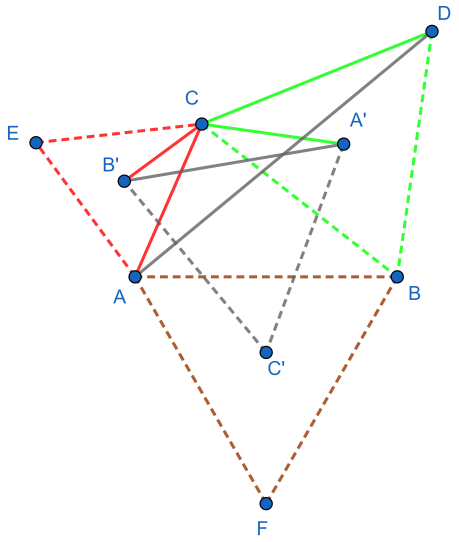
5. Sejam A', B' e C' os centros de BCD, ACE e ABF, respectivamente. Note que o triângulo CAD é imagem do triângulo $B'A'C$ por uma rotação de $+30°$ em torno de C, seguida por uma homotetia de centro C e razão $\sqrt{3}$. Isto se deve ao fato de que $B'A'C$ e CAD são semelhantes pelo caso LAL. Segue que

$$B'A' = \frac{AD}{\sqrt{3}}$$

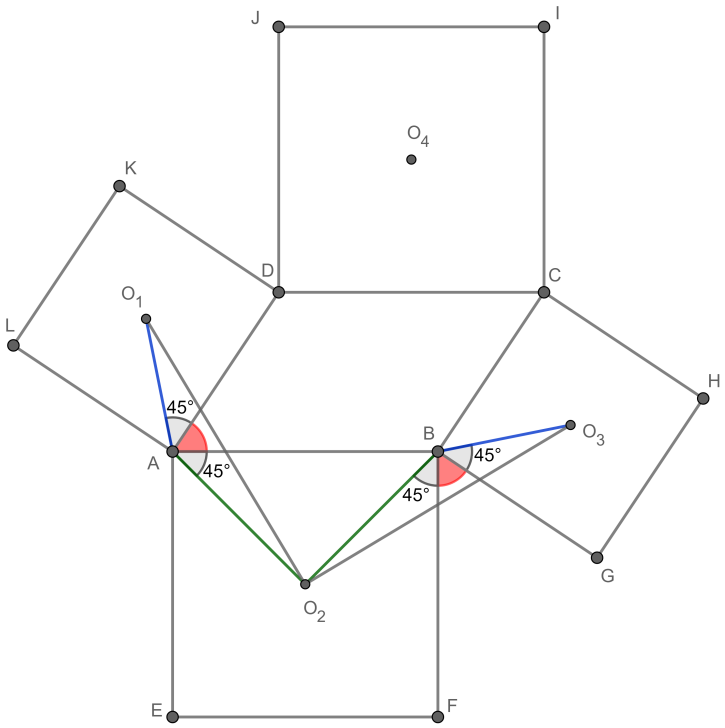
e, analogamente,

$$A'C' = \frac{CF}{\sqrt{3}} \text{ e } B'C' = \frac{EB}{\sqrt{3}}.$$

Pelo item (c) do exercício anterior, temos, portanto, $A'B' = B'C' = C'A'$.

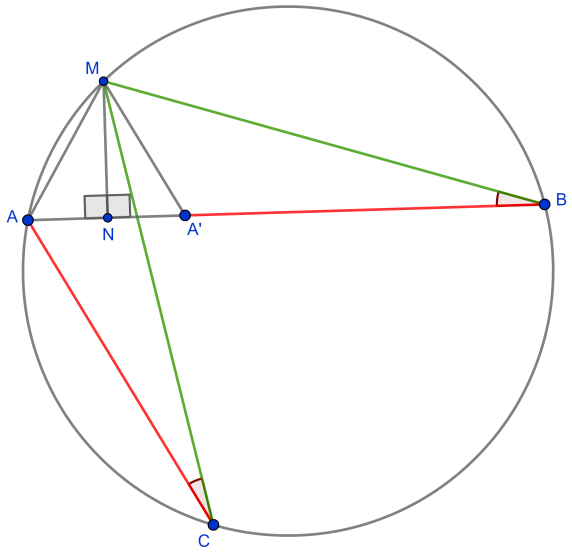


6. Sejam O_1, O_2, O_3 e O_4 os centros dos quadrados $ADKL$, $ABFE$, $BCHG$ e $CDJI$, respectivamente. Perceba que o triângulo AO_1O_2 é a imagem do triângulo BO_2O_3 por uma rotação de $-90°$ em torno de O_2. Desse modo, $O_1O_2 = O_2O_3$. Analogamente, obtemos $O_3O_4 = O_4O_1$ e $O_2O_3 = O_3O_4$. Portanto, $O_1O_2O_3O_4$ é, de fato, um quadrado.



7. Rotacione o triângulo AMC em torno de M por um ângulo de valor $\angle BMC$ no sentido anti-horário. Sejam A' e C' as imagens obtidas pela rotação descrita dos pontos A e C, respectivamente. Por construção, $MC = MB$ e, logo, $C' \equiv B$. Além disso, $A' \in AB$, pois $\angle ACM = \angle ABM$. Como $AC = A'B$, basta provarmos que $AN = A'N$.

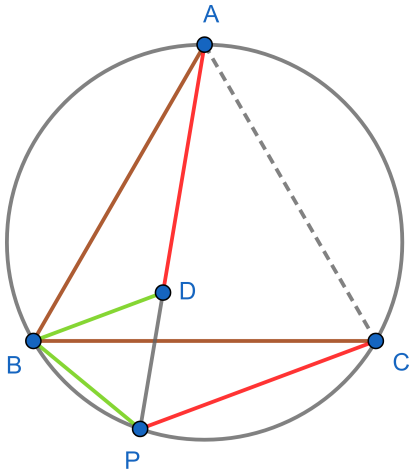
   Como $ACM \equiv A'BM$, então $AM = A'M$ e, assim, $\angle MAA' = \angle MA'A$ e $\angle AMN = \angle A'MN$. Logo, AMN e $A'MN$ são congruentes pelo caso LAL e $AN = A'N$, como queríamos demonstrar.



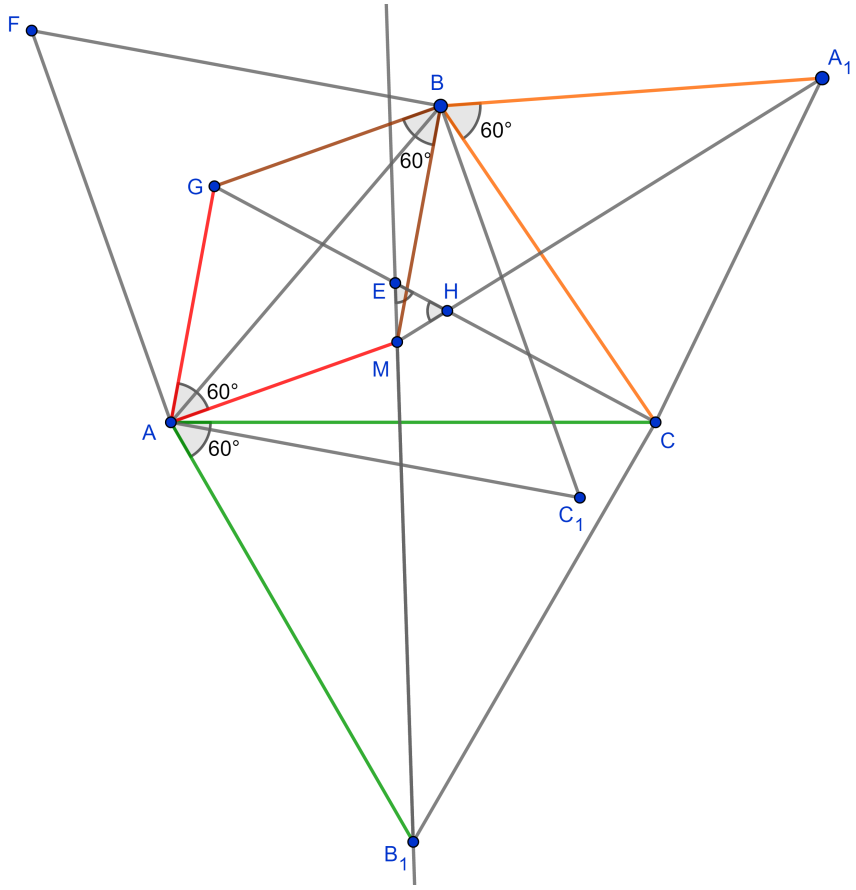
8. Seja D o ponto sobre o segmento PA tal que $PD = PB$. Queremos mostrar que $AD = PC$.

   Como $\angle APB = \angle ACB = 60°$, temos que BDP é equilátero e, por isso, $\angle ADB = 180° - 60° = 120° = \angle BPC$. Ademais, $\angle BCP = \angle BAP$, o que implica $\angle ABD = \angle CBP$.

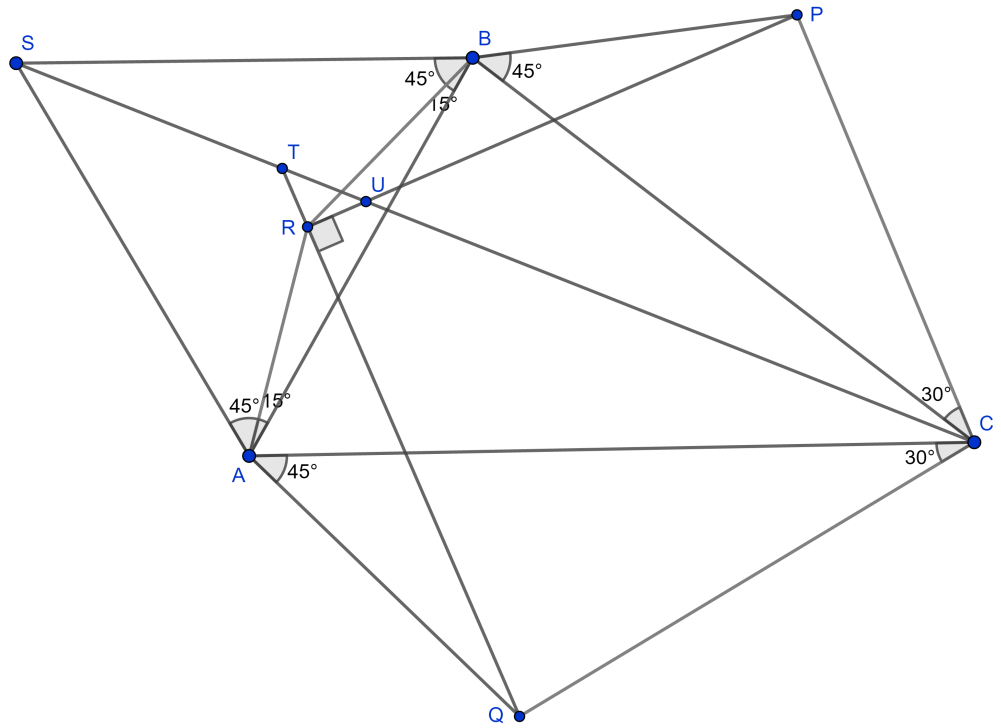
   Assim, o triângulo ABD pode ser obtido por uma rotação de $+60°$ do triângulo BCP em torno de B. Portanto, $AD = PC$, como queríamos demonstrar.



9. Construa sobre o lado AB o triângulo equilátero ABF de centro G, como mostrado abaixo. Sejam E e H os pontos de intersecção das retas B_1M e A_1M com o segmento CG, respectivamente. Observe que $AB_1M \equiv ACG$ (caso LAL) e que $A_1BM \equiv CBG$ (caso LAL). Logo, ACG é a imagem do triângulo AB_1M por uma rotação de $+60°$ em torno de A e CBG é a imagem de A_1BM por uma rotação de $-60°$ em torno de B. Desse modo, $MA_1 = CG = MB_1$. Além disso, pelo Teorema da seção 2, $\angle CEM = \angle GHM = 60°$ e, portanto, $B_1MA_1 = 120°$.



10. Construa sobre o lado AB o triângulo equilátero ABS, como mostra a figura. Perceba que $ARS \equiv BRS$ pelo caso LAL, uma vez que $AS = BS$, $\angle RAS = \angle RBS = 45°$ e $AR = BR$. Segue que $\angle ASR = 30°$ e $\angle ARS = 105°$.



Aplicando a lei dos senos nos triângulos ARS e ACQ, temos que

$$\frac{AR}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{AS}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Rightarrow AR = AS \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \right)$$

e

$$\frac{AQ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Rightarrow AQ = AC \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \right).$$

Assim, ACS pode ser obtido pela rotação de $+45^\circ$ do triângulo AQR em torno de A seguida de uma homotetia de centro A e razão $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Isto se deve ao fato de que $ACS \sim AQR$ pelo caso LAL. Semelhantemente, podemos concluir que BCS é a imagem de BPR pela rotação de -45° em torno de B, seguida por uma homotetia de centro B e razão $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Ou seja, $BPR \sim BCS$. Da primeira semelhança, obtemos:

$$\frac{AR}{AS} = \frac{QR}{SC}.$$

Da segunda semelhança,

$$\frac{BR}{BS} = \frac{RP}{SC}.$$

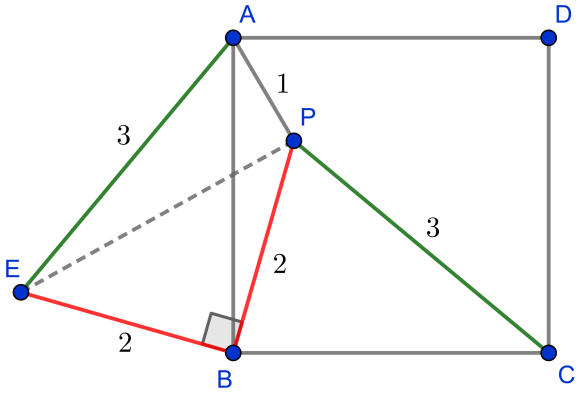
Como $AR = BR$ e $AS = BS$, então $QR = RP$.

Além disso, sejam T e U os pontos de intersecção das retas QR e RP com SC, respectivamente. Pelo teorema da seção 2, $\angle RTU = \angle RUT = 45^\circ$ e, portanto, $\angle QRP = 90^\circ$.

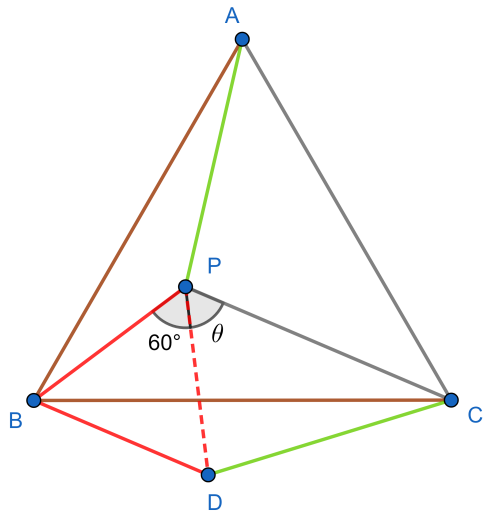
11. A rotação de $+90^\circ$ do triângulo BCP em torno de B resulta no triângulo ABE, como mostra a figura. Pelo Teorema de Pitágoras, $EP^2 = EB^2 + BP^2 = 8$. Ademais, no triângulo AEP, temos

$$EA^2 = 9 = 8 + 1 = EP^2 + AP^2.$$

Segue que AEP é retângulo em P e obtemos $\angle APB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.



12. A rotação de 60° no sentido horário em torno do ponto B leva o triângulo ABP no triângulo CBD, conforme a figura.



Assim, $\angle BPD = 60^\circ$ e $PD = 5$. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo DPC, com $\angle DPC = \theta$, vem:

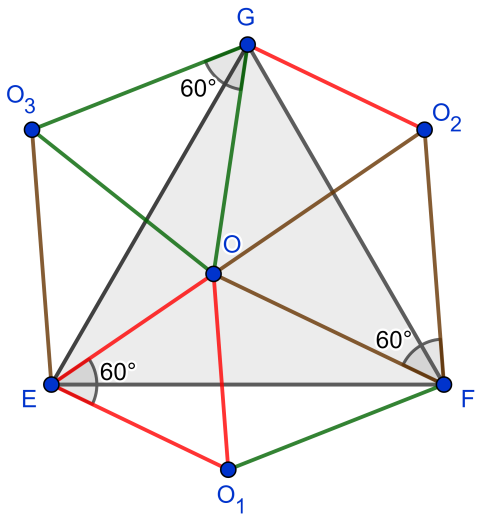
$$49 = 25 + 64 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\theta \Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

Daí, $\angle BPC = 120^\circ$ e, novamente pela lei dos cossenos, temos:

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow BC = \sqrt{129}.$$

13. Use um raciocínio semelhante ao do problema anterior.

14. Rotacione os triângulos EGO, EFO e FGO em torno de E, F e G, respectivamente, com ângulos de 60° no sentido horário.



Note que $[EO_1FO_2GO_3] = 2 \cdot [EFG]$ e que $OFO_1 \equiv OGO_2 \equiv OEO_3 \equiv ABC$ pelo caso LLL. Segue que:

$$3 \cdot [ABC] + [OEO_1] + [OFO_2] + [OGO_3] = 2 \cdot [EFG]$$

$$3 \cdot \left(\frac{uv \operatorname{sen} 120^\circ}{2} + \frac{uw \operatorname{sen} 120^\circ}{2} + \frac{vw \operatorname{sen} 120^\circ}{2} \right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \frac{X^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \cdot (uv + uw + vw) = 2X^2. \, (I)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos BCD, ACD e ABD, obtém-se:

$$a^2 = v^2 + w^2 - 2wv \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = v^2 + w^2 + vw$$

$$b^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos 120^\circ \Rightarrow b^2 = u^2 + w^2 + uw$$

$$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos 120^\circ \Rightarrow c^2 = u^2 + v^2 + uv$$

Somando essas 3 equações, temos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cdot (u^2 + v^2 + w^2) + vw + uw + uv. \, (II)$$

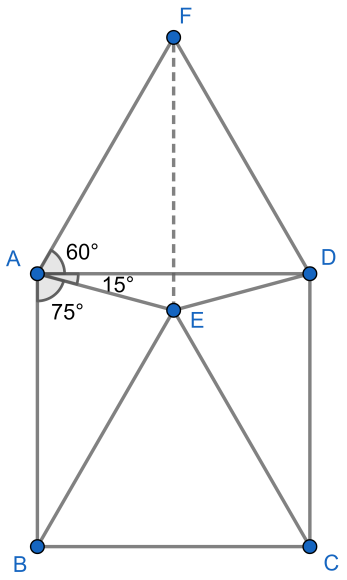
Substituindo (I) em (II), vem:

$$2X^2 - 3 \cdot (uv + uw + vw) = 2 \cdot (u^2 + v^2 + w^2) + uv + uw + vw$$

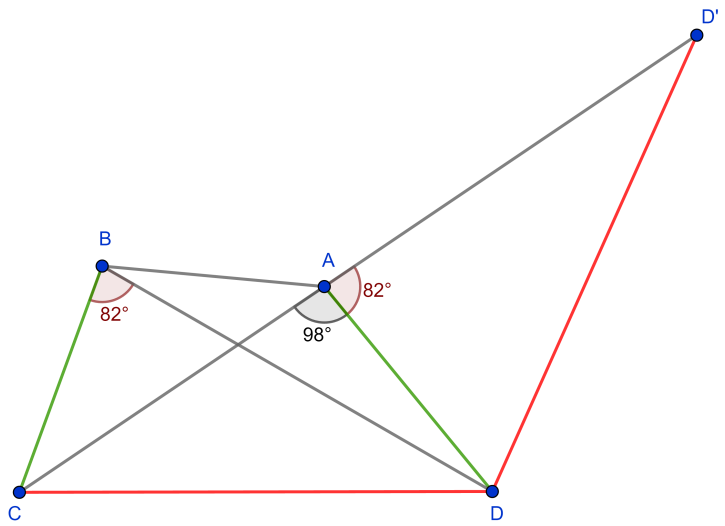
$$2X^2 = 2 \cdot (u + v + w)^2 \Rightarrow X = u + v + w.$$

15. Construindo o triângulo equilátero ADF (como mostrado abaixo), segue-se da congruência dos triângulos AEF e DEF (pelo caso LLL) que EF é paralela a AB. Logo, $\angle BAE$ e $\angle AEF$ são alternos internos e $\angle AEF = 75^\circ$, o que implica $AF = EF = DF$.

    Por outro lado, ABE e DEF são congruentes pelo caso LAL. Por isso, ABE pode ser obtido pela rotação de DEF em torno de E com ângulo de rotação $+150^\circ$. Portanto, $\angle ABE = \angle DFE = 30^\circ$ e $\angle EBC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

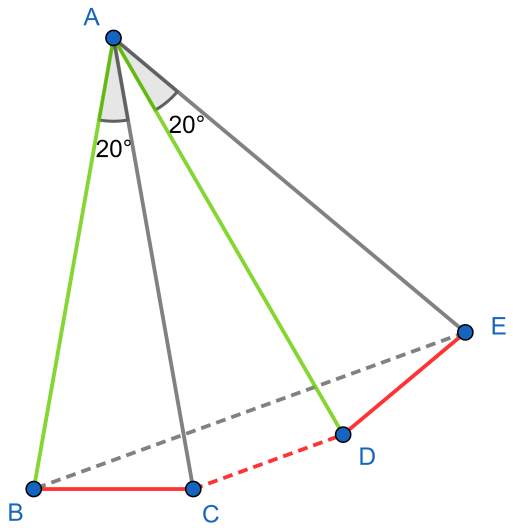


16. Considere a figura a seguir. Seja O (não representado abaixo) o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos AB e CD. Rotacione o triângulo BCD em torno de O de modo que as imagens de B, C e D pela rotação sejam A, D e D', respectivamente. Tal construção é possível tendo em vista que $BC = AD$.



Note que o triângulo CDD' é isósceles, já que $CD = DD'$. Logo, $\angle ACD = \angle CD'D = \angle BDC = 180° - (82° + 70°)$. Portanto, $\angle ACD = 28°$.

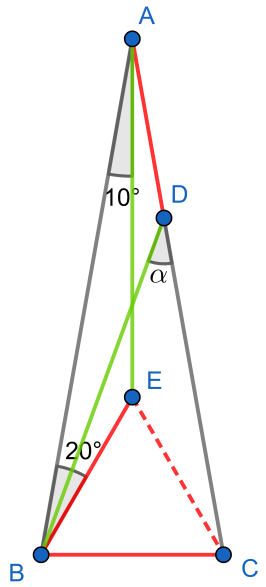
17. (a) Seja o triângulo ADE a imagem de ABC pela rotação de $+40°$ em torno do vértice A. Daí, temos que ABE é equilátero e que ACD é congruente a ABC. Portanto, $BE = AB$ e $BC = CD = DE$.



Sendo assim,

$$BE < BC + CD + DE \Rightarrow AC < 3 \cdot BC.$$

(b) A rotação do segmento BC de um ângulo de $+60^\circ$ em torno de B dá origem ao triângulo equilátero BCE, conforme a figura a seguir.

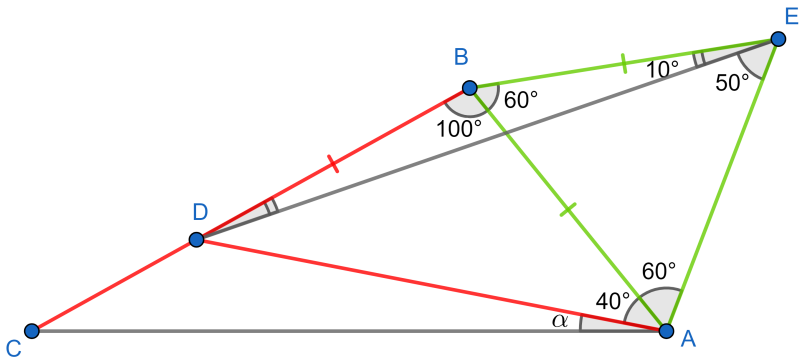


A congruência dos triângulos ABE e ACE (pelo caso LLL) nos diz que $\angle BAE = \angle CAE = 10^\circ$. Além disso, $EBA \equiv DAB$ (LAL), uma vez que $EB = DA$, $\angle EBA = \angle DAB = 20^\circ$ e AB é lado comum. Logo, $\angle ABD = \angle BAE = 10^\circ$ e, consequentemente,

$$\angle BDC = \alpha = \angle ABD + \angle BAD = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ.$$

18. Rotacione o segmento AC de -60° em torno de C. Obtém-se, assim, o triângulo equilátero ACE, de acordo com a figura. Por construção, ADE é isósceles e $ABC \equiv CDE$ pelo caso LAL, uma vez que $AB = CD$, $\angle CAB = \angle ECD$ e $AC = CE$. Portanto,

$$\angle BCA = \angle DEC \Rightarrow \alpha + 40^\circ = 50^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ.$$



6 Bibliografia

1. CAMPOS, O. *Rotações*. Olímpiada Brasileira de Matemática - 10ª Semana Olímpica, São José do Rio Preto, 2007.

2. RODRIGUES, Adriano. Napoleão e as "Revoluções"no Plano Euclidiano. **É Matemática, Oxente!**, Recife, jun. de 2019.

3. LIMA, E. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

4. THIAGO, Cícero. *Transformações geométricas II - Simetria e rotação*. Polos Olímpicos de Treinamento, Aula 18, 2012.