ALGORITMOS

Ramyro Corrêa

1 Introdução

Em muitos problemas de combinatória, a seguinte situação ocorre: "dada uma operação P e um estado E do problema, prove que é possível obter um estado E' (a ser especificado no enunciado) aplicando somente a operação P". Obviamente, quando trabalhamos com algoritmos, é crucial verificar se o algoritmo funciona em todos os casos do problema e também se o algoritmo termina. Agora, vejamos alguns exemplos de problemas olímpicos que usam algoritmos.

2 O Algoritmo Guloso

No geral, em vários problemas conforme descrito acima, às vezes é fácil notar uma sequência de operações que, intuivamente, parece ser a melhor, ou às vezes queremos evitar o "pior caso". Porém, é necessário saber formalizar tais ideias. O algoritmo guloso consiste justamente em fazer a "melhor escolha" a cada operação, a fim de obter o resulado desejado ao final do algoritmo.

2.1 Exemplo 1

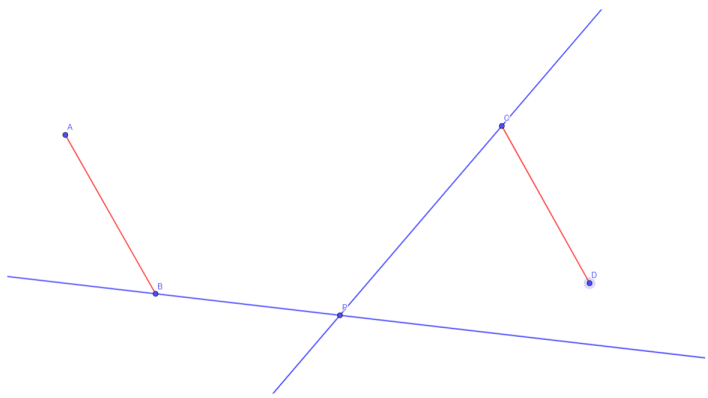
(IMO 2014/6) Um conjunto de retas no plano está em posição geral se não há duas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto. Um conjunto de retas em posição geral corta o plano em regiões, algumas com área finita, chamadas regiões finitas. Prove que, para todo n suficientemente grande, em qualquer conjunto de n retas em posição geral é possível pintar de azul pelo menos $\sqrt{n}$ dessas retas, de modo que nenhuma das suas regiões finitas tenha uma fronteira completamente azul.

Solução: Lendo o problema, uma das poucas abordagens que vêm em mente é de pintar as retas de azul até não dar mais (algoritmo guloso), de modo que se pintarmos qualquer outra reta de azul nós obtemos uma região finita totalmente azul. Suponha que tenhamos pintado a retas de azul.

Primeiramente, observe que para cada reta r não-azul, existe uma região finita A_r tal que r é aresta em A_r, pois caso contrário poderíamos pintar r de azul e continuar com a propriedade de que nenhuma região finita seja totalmente azul, o que seria uma contradição.

Agora, para cada reta r não-azul, associe o próximo ponto no sentido anti-horário em A_r. Denote tal ponto por $f(r)$. Veja que a função f possui domínio nas retas não-azuis e contradomínio nos pontos azuis (pontos formados por duas retas pintadas de azul).

Tome $P \in Imf$. Observe que a seguinte situação não pode ocorrer, pois caso contrário, $f(AB) = P = f(CD)$, então já que o ponto C não seria azul, deveríamos ter um ponto azul C' entre P e C, mas então teríamos $f(CD) = C' \implies P = C'$, o que claramente é um absurdo.



Portanto, cada ponto P, existem no máximo 2 retas não-azuis r, s tais que $f(r) = f(s) = P$, pois caso existissem pelo menos 3 dessas retas, a situação descrita anteriormente aconteceria, pelo Princípo das Casas dos Pombos. Logo, temos que $n - a \leq 2\binom{a}{2} = a^2 - a \implies a^2 \geq n \implies a \geq \sqrt{n}$, como desejado.

2.2 Exemplo 2

(IMO SL 2020/C8- adaptado) Clara joga um jogo em um quadro que inicialmente contém 2022 cópias do número 1. Em cada rodada, Clara apaga 2 números x e y do quadro, então um dos números $x+y$ ou $|x-y|$ é escrito aleatoriamente por uma máquina no quadro. O jogo termina assim que, no fim de alguma rodada, uma das seguintes situações ocorrer:

(1) algum número no quadro é maior do que a soma de todos os outros números no quadro;

(2) existem somente números zeros no quadro.

Ao fim do jogo, Clara recebe uma quantidade de moedas equivalente à quantidade de números escritos no quadro na última rodada. Prove que Clara sempre pode ganhar pelo menos 8 moedas.

Solução: Denotemos por $(+)$ a operação que troca x, y por $x+y$ e $(-)$ a operação que troca x, y por $|x-y|$. Assim, a estratégia de Clara é a seguinte:

Sempre que houver x números k iguais no quadro, Clara seleciona $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ pares desses números e os escolhe para que a máquina realize $(+)$ ou $(-)$, obtendo alguns números $2k$ e alguns números 0 no fim do processo. Clara faz isso até que não seja mais possível. Observe que como os números inciais são iguais a 1, então pelo algoritmo descrito, só aparecerão números que sejam da forma 2^m ou 0 no quadro. Logo, quando Clara não puder mais aplicar sua operação, restarão no quadro números

$$2^{a_1}, 2^{a_2}, ..., 2^{a_t}$$

e M zeros, com $a_1, a_2, ..., a_t$ distintos 2 a 2. Suponha sem perda de generalidade que $a_t > a_{t-1} > ... > a_1$, e perceba que $2^{a_t} > 2^{a_t} - 1 = 2^{a_t} + 2^{a_t - 1} + ... + 1 \geq 2^{a_{t-1}} + 2^{a_{t-2}} + ... + 2^{a_1}$, logo (1) ocorre e o jogo realmente acabou.

Agora, suponha que $t + M \leq 7$. Além disso, suponha que a máquina tenha realizado $(-)$ nos pares $(2^{b_1}, 2^{b_1}), (2^{b_2}, 2^{b_2}), ..., (2^{b_M}, 2^{b_M})$. Observe que quando a máquina realiza $(+)$, a soma dos números no quadro permanece a mesma, ao passo que quando a máquina realiza $(-)$ em um par (k, k), a soma dos números no quadro diminui em exatemente $2k$. Portanto, já que a soma dos números no quadro é, inicialmente, 2022, temos que

$$2^{a_t} + 2^{a_{t-1}} + 2^{a_{t-2}} + ... + 2^{a_1} = 2022 - 2^{b_1+1} - 2^{b_2+1} - ... - 2^{b_M+1}$$

$\implies 2022 = 2^{a_t} + 2^{a_{t-1}} + 2^{a_{t-2}} + ... + 2^{a_1} + 2^{b_1+1} + 2^{b_2+1} + ... + 2^{b^M}$. No entanto, como $2022 = (11111100110)_2$ e $t + M \leq 7$ por suposição, deveríamos ter que a soma dos dígitos na base 2 de 2022 ($S_2(2022)$) tem que ser no máximo 7, pois já que $S_2(a) + S_2(b) \geq S_2(a+b)$, $S_2(2022) = S_2(2^{a_t} + 2^{a_{t-1}} + 2^{a_{t-2}} + ... + 2^{a_1}) + S_2(2^{b_1+1} + 2^{b_2+1} + ... + 2^{b^M}) \leq t + M \leq 7$. Por outro lado, como $2022 = (11111100110)_2$, $S_2(2022) = 8 \leq 7$, um absurdo.

Portanto, $t + M \geq 8$, e com a estratégia apresentada, Clara sempre consegue ganhar pelo menos 8 moedas.

3 Ser guloso nem sempre é bom...

3.1 Exemplo 3

(IMO 2017/5) Um inteiro $N \geq 2$ é dado. Um grupo de $N(N+1)$ jogadores de futebol de alturas 2 a 2 distintas está posicionado em uma fila. Clara deseja remover $N(N-1)$ jogadores dessa fila, deixando $2N$ jogadores na fila, de modo que as seguintes N condições sejam satisfeitas:

(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos

(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto

.

.

.

(N) Não resta ninguém entre os jogadores mais baixos

Prove que isso é sempre possível.

Solução: Primeiramente, precisamos descobrir como lidar com o fato de serem $N(N+1)$ jogadores na fila, e não um natural n qualquer. Um jeito aparentemente promissor de usar isso parece ser separar os jogadores em grupos de N jogadores. Então, para todo $1 \leq k \leq N$, denotemos por G_k o grupo de jogadores que estavam nas $(k-1)(N+1)+1, (k-1)(N+1)+2, ..., (k-1)(N+1)+N+1$. Suponha que $G_k = \{a_{k,N+1} > a_{k,N} > ... > a_{k,2} > a_{k,1}\}$ é a ordenação dos jogadores em G_k de acordo com suas alturas.

Além disso, dizemos que $(a_i, b_i) \succ (a_j, b_j)$ se, e somente se, $min(a_i, b_i) > max(a_j, b_j)$. Observe que se encontramos N pares $(a_{i_1}, a_{j_1}), (a_{i_2}, a_{j_2}), ..., (a_{i_N}, a_{j_N})$ com $(a_{i_1}, a_{j_1}) \succ (a_{i_2}, a_{j_2}) \succ ... \succ (a_{i_N}, a_{j_N})$ e tais pares em G_i's distintos, então o problema acaba, pois basta Clara remover os outros $N(N-1)$ jogadores da fila.

Então, vamos montar um algoritmo de modo a cumprir a condição acima:

(1) Escolha $1 \leq i_1$ de modo que $a_{i_1,N}$ é máximo, e então escolha $a_{i_1,N+1}$

(2) Agora, esqueça G_{i_1} e escolha $1 \leq i_2 \leq N$ com $i_1 \neq i_2$ tal que $a_{i_2,N-1}$ é máximo, então escolha $a_{i_2,N}$

.

.

.

(k) Esqueça $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_{k-1}}$ e escolha $1 \leq i_k \leq N$, com $i_k \neq i_{k-1}, i_{k-2}, ..., i_1$ tal que $a_{i_k,N-(k-1)}$ é máximo, e então escolha $a_{i_k,N-(k-2)}$

$\Longrightarrow$ Por construção, temos que $(a_{i_1,N}, a_{i_1,N+1}) \succ (a_{i_2,N-1}, a_{i_2,N}) \succ ... \succ (a_{i_N,1}, a_{i_N,2})$, o que acaba com o problema.

4 Problemas

Problema 1: Prove que, para cada inteiro positivo n, existem inteiros $a_1, a_2, ...$ tais que $0 \leq a_i \leq i$ para todo i natural e

$$n = a_1.1! + a_2.2! + a_3.3! + ...$$

Problema 2: Em um grafo G com n vértices, nenhum vértice possui grau maior do que Δ. Prove que é possível colorir os vértices de G com no máximo $\Delta+1$ cores de modo que quaisquer dois vértices distintos possuam cores distintas.

3.(Rússia 2005) Em um tabuleiro $2\times n$ são colocados números reais positivos em cada casa de modo que a soma deles em cada coluna seja igual a 1. Mostre que é possível escolher um número em cada coluna de modo que a dos números escolhidos em cada linha seja no máximo $\frac{n+1}{4}$.

4.(ISL 2013/C1) Seja n um inteiro positivo. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer números reais $a_1, a_2, ..., a_d$ tais que $0 \leq a_i \leq 1$ para $i = 1, 2, ..., d$, é possível particionar esses números em k grupos (alguns podem ser vazio) tal que a soma dos números de cada grupo é no máximo 1.

5.(Teorema de Euler) Seja G um grafo planar e A, F, V os números de arestas, faces e vértices em G. Prove que $V + F = A + 2$.

Problema 6: 4951 pontos estão no plano de modo que não há 4 deles colineares. Prove que é possível escolher 100 destes pontos de modo que quaisquer 3 pontos não sejam colineares.

7.(HHMT 2018) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo. Um subconjunto S de inteiros positivos é dito compreensivo se, para todo $0 \leq k \leq n$, existe um subconjunto de S (possivelmente vazio) cuja soma dos elementos deixa resto k na divisão por n. Prove que se S é um conjunto compreensivo, então existe um subconjunto de S com no máximo $n-1$ elementos que também é compreensivo.

8.(IMO 2014/5) Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos), com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

9.(IMO 2010/5) Cada uma das 6 caixas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ contém inicialmente uma moeda. As seguintes operações são permitidas:

(1) Escolher uma caixa não vazia $B_j, 1 \leq j \leq 5$, remover uma moeda de B_j, e adicionar duas moedas a B_{j+1};

(2) Escolher uma caixa não vazia $B_k, 1 \leq k \leq 4$, e trocar os conteúdos das caixas B_{k-1} e B_{k+1}.

Determine se existe uma sequência finita de operações dos tipos permitidos, de modo que as cinco caixas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ficam vazias, enquanto a caixa B_6 contém exatamente $2010^{2010^{2010}}$ moedas.

10.(IMO 2019/3) Uma rede social tem 2019 de usuários, alguns pares dos

quais são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

- Três usuários A, B e C, de modo que A é amigo de B e C, mas B e C não são amigos, altere seus status de amizade para que B e C sejam amigos, mas A não é mais amigo nem de B e nem de C. Todos os outros status de amizade permanecem inalterados.

Inicialmente, 1010 usuários têm 1009 amigos cada, e 1009 usuários têm 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos após a qual cada usuário é amigo de, no máximo, um outro usuário.

5 Dicas

1. Use o algoritmo guloso.
2. Considere o vértice de grau máximo em G e olhe para os seus vizinhos.
3. Use o algoritmo guloso de um jeito esperto.
4. Conjecture a resposta primeiro.
5. Elabore um algoritmo que não altere muito a estrutura do grafo e que deixe o grafo mais "simples".
6. Use o algoritmo guloso.
7. Considere o multiconjunto dos elementos de $S \pmod{n}$ e tente usar o algoritmo guloso.
8. Tente "enxugar" os valores das moedas, por exemplo, podemos considerar 2 moedas de valor $\frac{1}{2k}$ como sendo na verdade uma única moeda de valor $\frac{1}{k}$.
9. Pergunte-se como obter números arbitrariamente grandes usando a operação dada.
10. Considere o grafo óbvio do problema e prove que tal grafo é conexo. Depois, veja qual seria a situação perfeita para que cheguemos no estado desejado do problema.

6 Bibliografia

- Olympiad Combinatorics, by Pranav A. Siriam