Simulado OBMEP - Nível 1

-Instruções:

-A duração da prova é de 3 horas;

-Cada problema vale 20 pontos;

-Todas as respostas devem ser justificadas.

1. A professora Célia, em uma aula sobre sequências, resolve fazer uma brincadeira de adivinhação com padrões:

I) Primeiro ela escolhe um número Natural.

II) Cláudia deve dizer o dobro do seu sucessor.

III) Marcelo deve dizer o triplo do antecessor dito por Cláudia.

IV) Por fim, Ademar deve dizer o quádruplo do sucessor do número dito por Marcelo.

a) Se a professora Célia escolher 3, qual será a sequência formada pelos 4 números?

b) Diani estava no banheiro e quando voltou, ouviu Ademar dizendo 184. Qual foi o número escolhido pela professora?

c) Crie uma expressão para determinar o número escolhido pela professora se Ademar disse que o resultado é x.

2. A calculadora de Joseane ficou maluca: para cada algarismo que ela aperta, aparece seu dobro no visor. As teclas de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão funcionam normalmente e não podem ser apertadas duas vezes seguidas. Por exemplo, uma sequência de operações permitida é escrever $2 \to \times \to 3$, que gera o número $4 \cdot 6 = 24$.

a) Como ela pode fazer aparecer 80 apertando 3 teclas?

b) Como ela pode fazer aparecer 50 apertando 3 teclas de algarismos e duas de operações de forma alternada?

c) Qual a menor quantidade de teclas que ela deve apertar para obter no número 23?

3. Pedrinho tem uma calculadora muito especial, que só mostra o último algarismo de qualquer conta que Pedrinho escreve na calculadora. Por exemplo, se ele escreve $3^3 = 27$, sua calculadora mostra o número 7.

a) Pedrinho digitou a expressão 7^4 em sua calculadora. Qual algarismo apareceu como resultado?

b) Agora, Pedrinho digitou a expressão 7^{2022} na calculadora. Qual algarismo apareceu como resultado final?

c) Por fim, Pedrinho quis experimentar um pouco, e digitou $7^{12345} + 2^{999} + 5^{15}$ na calculadora. Qual foi o resultado que apareceu para ele?

4. Caique tem dois dados cúbicos muito especiais. Neles, ao invés de ter os números de 1 a 6, os dados de Caique (Dados A e B) têm, respectivamente, os números $1, 2, 2, 4, 8, 8$ (Dado A) e $2, 2, 2, 3, 6, 9$ (Dado B).

a) Caique escolheu aleatoriamente, sem ver, um de seus dados, e o jogou. Qual é a probabilidade de ele ver o número 2 na face superior do dado jogado?

b) Agora, Caique resolveu jogar os dois dados. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas faces superiores dos dados seja igual a 14?

c) Ainda jogando os dois dados, qual é a probabilidade de a soma dos números nas faces superiores dos dados seja igual a 10?

5. Dados dois números reais a e b, defina a operação ab por $a*b = ab+a+b+6$. Por exemplo, $3*7 = 3.7+3+7+6 = 23$ e $3*3 = 3.3+3+3+6 = 21$.

a) Encontre o valor de $9*99$.

b) Encontre o número real b tal que $2*b = b$.

c) Determine todos os números inteiros positivos a e b, com $a < b$, tais que $a*b = 20$.

6. Sobre uma mesa existe uma certa quantidade N de balas. Aline e Bruna combinam que, alternadamente, cada uma deve comer pelo menos uma, mas não mais que a metade da quantidade existente. Vence o jogo quem comer a última bala. Ana sempre começa o jogo.

a) Para $N = 5$, qual das duas tem a posição vencedora? (Posição vencedora é aquela na qual a jogadora pode vencer qualquer que seja a sequência de jogadas de sua adversária.)

b) Para $N = 20$, qual das duas tem a posição vencedora?

c) Quais são os valores de N, sendo $100 < N < 200$, que dão à Bruna a posição vencedora?

d) Determine todos os valores de N que dão à Bruna uma posição vencedora.