Princípio de Huygens e Fenda Dupla

Gabriel Baptista

January 2023

Introdução

No estudo da **Óptica Física**, analisaremos os fenômenos relacionados às características ondulatórias da luz, dando enfâse na **Polarização**, na **Difração**, e na **Interferência** da luz. Nesse material, iremos estudar o fenômeno da interferência da luz a partir de duas ou mais fendas, situação semelhante ao experimento realizado por Thomas Young em 1802.

1 Princípio de Huygens

O princípio de Huygens sugere que cada ponto de uma frente de onda funciona como uma nova fonte, produzindo ondas de mesma frequência e velocidade que se propagam na mesma direção da onda original.

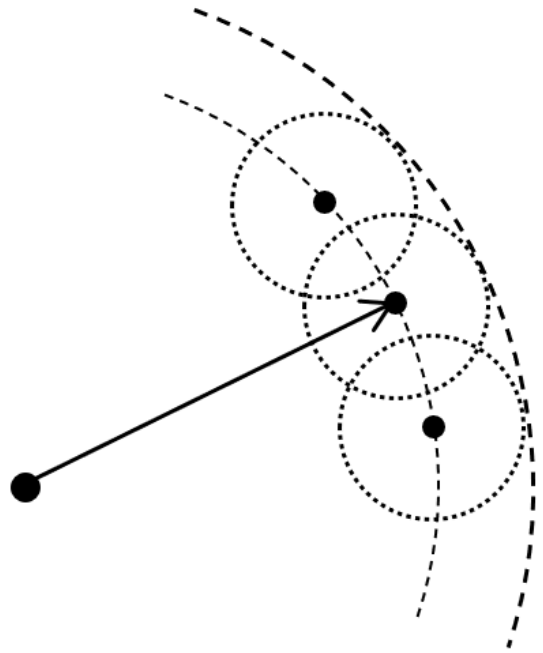
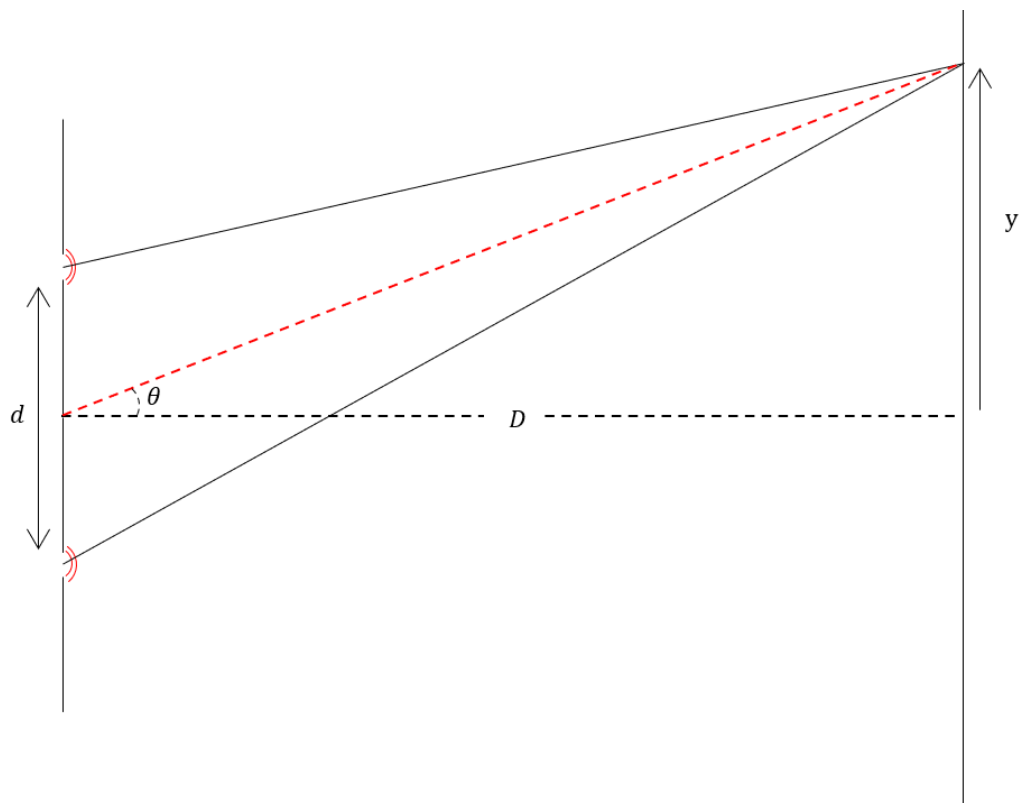


Figura 1: Princípio de Huygens representado em onda esférica

2 A Fenda Dupla

2.1 Interferência

Considere uma frente de onda plana monocromática de comprimento de onda λ incidente em um anteparo com 2 pequenos orifícios separados por uma distância d. Pelo **Princípio de Huygens**, cada um desses orifícios funcionarão como novas fonte, as quais causarão um padrão de interferência (regiões de máximos e mínimos de intensidade) ao longo de um outro anteparo a uma distância $D >> d$ do anteparo inicial.



Como a distância de separação entre os anteparos é muito maior que a de separação entre as fendas, o ângulo θ se torna muito pequeno (permitindo que aproximemos $sen\theta \approx tg\theta$) e os raios são emitidos de forma quase que totalmente paralela.
Analisando a figura abaixo, fica fácil perceber que a diferença de caminho óptico Δx entre os dois raios é de $\Delta x = dsen\theta$.

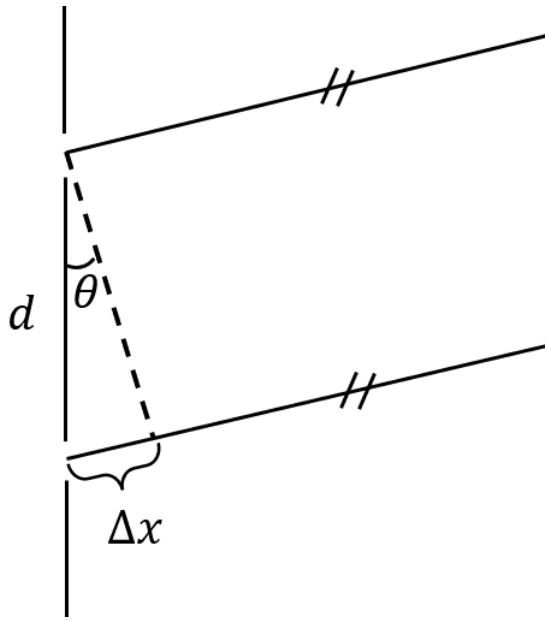


Figura 2: Diferença de Caminho Óptico entre dois raios paralelos

Como já estudamos antes, haverá **Interferência Construtiva** quando $\Delta x = n\lambda$ e **Interferência Destrutiva** quando $\Delta x = (n + \frac{1}{2})\lambda$. As regiões de interferência construtiva, portanto estão localizadas a uma distância y do eixo horizontal dada por:

$$y_{máx} = Dtg\theta \approx Dsen\theta$$
$$y_{máx} = \frac{D\lambda}{d}n;\ n = 0, 1, 2 \cdots$$

A distância de separação entre as franjas de luz é de:

$$\Delta y = \frac{D\lambda}{d}(n+1) - \frac{D\lambda}{d}n = \frac{D\lambda}{d}$$

2.2 Intensidade

A luz é uma onda eletromagnética de um **campo elétrico** ($\vec{E}$) e um **campo magnético**($\vec{B}$) que oscilam em fase e perpendicularmente entre si. Portanto, sua amplitude pode ser representada pela amplitude de seu campo elétrico

(ou magnético) oscilante, que, por simplicidade, adotaremos que se comporta como uma onda harmônica:

$$E = E_0\, cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

Notação complexa

Calcular o padrão de intensidade das ondas interferentes se torna **muito** mais fácil se tratarmos a amplitude como a **parte real de um número complexo.** Para isso, lembremos que $e^{\pm i\theta} = cos\theta \pm isen\theta$. Portanto, podemos definir a **amplitude complexa** como:

$$\tilde{E} = E_0\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{2}$$

Perceba que nossa amplitude original é a parte real da equação acima: $E = \Re\{\tilde{E}\}$. A amplitude resultante da onda que chega no anteparo é a **soma das amplitudes individuais de cada onda**:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_r &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{E}_j \\
\tilde{E}_r &= E_0\, e^{i(kx_1-\omega t)} + E_0\, e^{i(kx_2-\omega t)} \\
\tilde{E}_r &= E_0\, e^{-i\omega t}(e^{ikx_1} + e^{ikx_2})
\end{aligned}$$

Aqui, x_1 e x_2 representam o caminho óptico percorrido por cada um dos raios. Podemos, portanto, reescrever a equação acima usando $x_2 = \Delta x + x_1$ e obter a equação a qual estávamos à procura:

$$\tilde{E}_r = E_0\, e^{i(kx_1-\omega t)}\,(1 + e^{i\Delta\varphi}) \tag{3}$$

Onde $\Delta\varphi = k\Delta x$ é a diferença de fase.

Método dos Fasores

Vamos definir um plano cartesiano no qual é possível **representar geometricamente os números complexos**. Nesse plano, conhecido como **Plano de Argand-Gauss**, o eixo y representará os números **Imáginários**, enquanto o eixo x representará os **Reais**. Consequentemente, o número imaginário $z = e^{i\theta}$ representa um vetor de módulo unitário inclinado em θ com

o eixo Real.
Portanto, a soma $1 + e^{i\Delta\varphi}$ pode ser representada como:

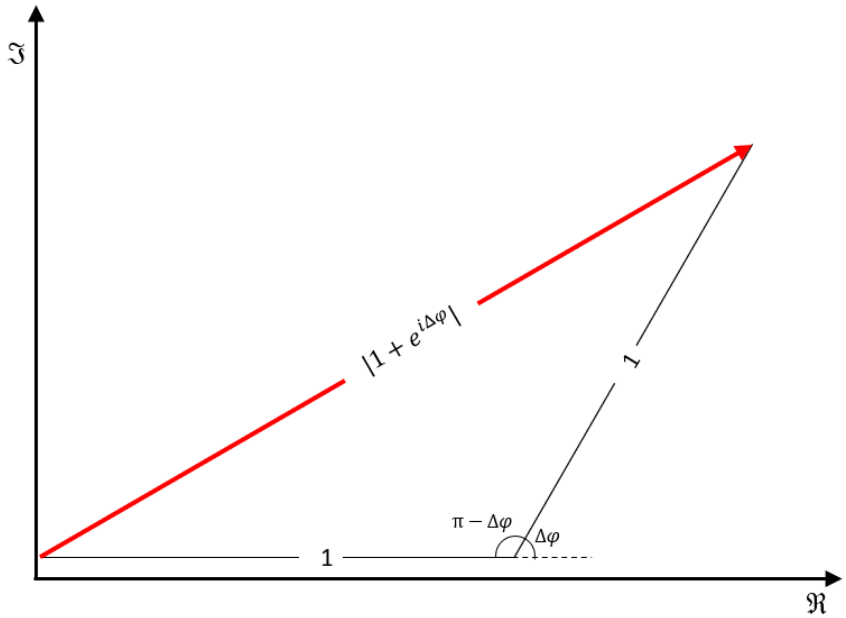


Figura 3: Soma no plano de Argand-Gauss

Aplicando a **Lei dos Cossenos** no triângulo acima:

$$(1 + e^{i\Delta\varphi})^2 = 2(1 + cos\Delta\varphi)$$

Substituindo o último resultado na eq.3:

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} \sqrt{2}\sqrt{1 + cos\Delta\varphi} \tag{4}$$

A intensidade de uma onda eletromagnética no vácuo é proporcional ao quadrado de sua amplitude ($I \propto \tilde{E_r}^2$) e, portanto:

$$I/I_0 = 2(1 + cos\Delta\varphi) \tag{5}$$

Onde I_0 é uma constante. A partir da equação acima, já fica evidente que os picos de **máxima** e **mínima** intensidade ocorrem em $\Delta\varphi = 2\pi n$ e $\Delta\varphi = \pi m$ respectivamente, onde n e m são inteiros e m é ímpar. Porém,

podemos refinar mais ainda a nossa expressão usando algumas identidades trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
I/I_0 &= 2(1 + cos\Delta\varphi) \\
&= 2(1 + cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} - sen^2\frac{\Delta\varphi}{2}) \\
&= 2(1 + cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} - (1 - cos^2\frac{\Delta\varphi}{2})) \\
&= 4cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

Fazendo $\Delta\varphi = k\Delta x = kdsen\theta$, obtemos nossa **Função Distribuição de Intensidade** em função em θ:

$$I/I_0 = 4cos^2(kd\,sen\theta/2) \tag{6}$$

Esse é o resultado mais "polido"que podemos alcançar. Se fôssemos analisar o padrão de interferência que essa distribuição de intensidade gera no anteparo, veríamos algo parecido com a figura abaixo:

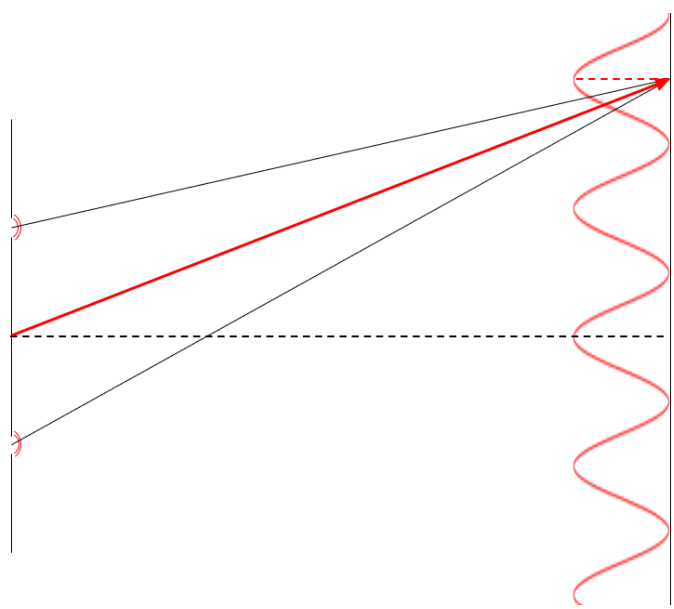


Figura 4: Máximos e Mínimos de interferência no anteparo

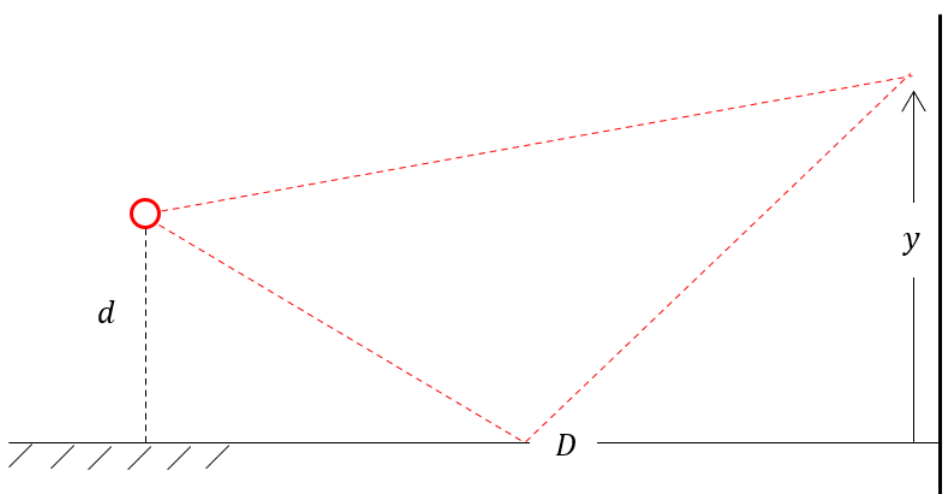
3 Exercícios

3.1 Raios Inclinados **

Um feixe paralelo de luz monocromática incide de forma oblíqua em um anteparo com 2 fendas por um ângulo θ com a horizontal. Há um outro anteparo localizado a uma distância $D >> d$ do inicial, no qual é observado um padrão de interferência. Calcule o quanto o primeiro máximo de intensidade vai estar deslocado do eixo horizontal em comparação com a incidência normal ($\theta = 0$).
Resposta: $\Delta y = Dsen\theta$

3.2 Espelho de Lloyd **

Na experiência do espelho de Lloyd, observa-se num anteparo a interferência entre a luz que vai diretamente de uma fonte de luz puntiforme para um ponto do anteparo e a luz que vai da fonte para o anteparo refletindo-se num espelho plano localizado abaixo da fonte. A distância da fonte ao espelho é d, e a da fonte ao anteparo é $D >> d$. Calcule a altura y do n° máximo de intensidade.



Resposta: $y_{(n)} = \frac{\lambda D}{4d}(2n-1)$

3.3 N Fendas ***

Considere uma frente de onda plana monocromática de comprimento de onda λ (idêntica à tratada nesse material) incidindo em um anteparo com **N Fendas** separadas entre si por uma distância d. Mostre que o padrão de interferência em um outro anteparo a uma distância $D >> d$ do inicial vale:

$$\frac{I_{(\alpha)}}{I_0} = \frac{sen^2 \frac{N\alpha}{2}}{sen^2 \frac{\alpha}{2}}; \; \alpha = kd\, sen\theta$$

Dica: escreva as amplitudes utilizando a notação complexa.