Capacitores - parte I

Vitória Bezerra

1 Introdução

Seja bem-vindo! Nesta aula iniciaremos uma discussão a respeito dos capacitores. Analisaremos a capacitância, os capacitores plano, esférico e cilíndrico, a energia armazenada por um capacitor e a força entre as armaduras de um capacitor plano.

É importante que o aluno esteja familiarizado com o estudo de força eletrostática, campo elétrico e potencial elétrico, além de possuir noções básicas de cálculo diferencial e integral. Bom estudo!

2 Capacitância

Inicialmente, um capacitor ou condensador é formado por um conjunto de dois ou mais condutores isolados entre si por meio de dielétricos com a finalidade de armazenar energia elétrica, associada ao campo elétrico. O armazenamento é feito através do acúmulo de cargas nas suas armaduras.

A capacitância é uma grandeza associada à capacidade de armazenamento de energia de um capacitor para uma dada diferença de potencial estabelecida entre os condutores. É definida como a razão entre a carga armazenada pelo capacitor e a diferença de potencial (d.d.p) entre os capacitores.

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1}$$

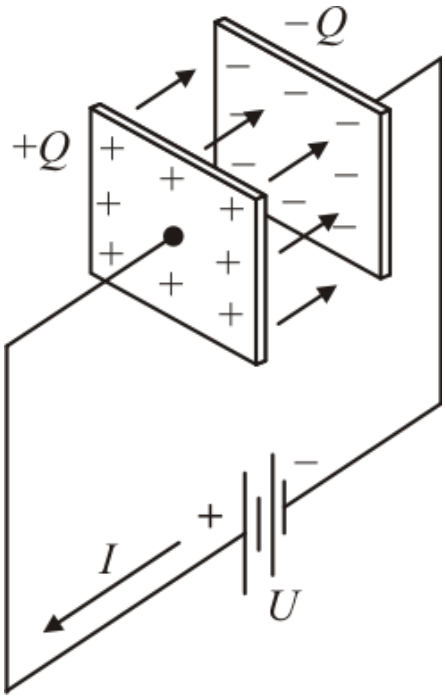
A capacitância depende somente da geometria do capacitor e do dielétrico presente entre os condutores.

A unidade de capacitância no S.I é o farad (F), definida por:

$$1F = \frac{1C}{1V} \tag{2}$$

3 Capacitor Plano

O capacitor plano é formado por duas placas paralelas. Seja A a área entre as placas, d a distância entre elas, ε_0 a permissividade elétrica do vácuo que encontra-se entre as placas, V a diferença de potencial entre as placas e Q o módulo das cargas em cada uma das placas.



Lembrando dos estudos de campo elétrico, sabemos que o campo entre dois planos paralelos é dado por $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, sendo σ a densidade superficial de carga e ε_0 a permissividade absoluta do vácuo ($\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$).

E através dos estudos de potencial elétrico, provamos que a diferença de potencial entre dois pontos em uma região entre duas placas é igual a Ed (sendo E o módulo do campo elétrico e d a distância entre esses dois pontos). Assim, podemos calcular a capacitância desse tipo de capacitor.

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{Q}{Ed} \Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} \Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{Q}{A\varepsilon_0} d} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{3}$$

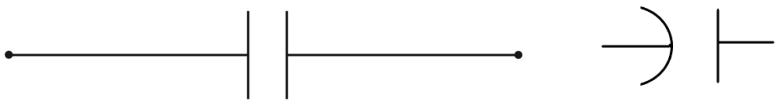
Veja que utilizamos um caso particular onde consideramos haver vácuo entre as placas. Para um dielétrico qualquer, temos:

$$C = \frac{\varepsilon.A}{d} \tag{4}$$

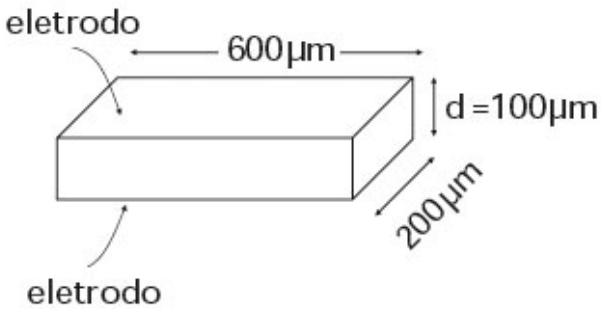
A capacitância também pode ser representada em função da constante dielétrica, K, (permissividade relativa) do dielétrico, $K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$:

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} \tag{5}$$

Nos diagramas de circuitos, um capacitor pode ser representado por qualquer um dos seguintes símbolos:



Exemplo: (UNICAMP) Numa tela de televisor de plasma, pequenas células contendo uma mistura de gases emitem luz quando submetidas a descargas elétricas. A figura a seguir mostra uma célula com dois eletrodos, nos quais uma diferença de potencial é aplicada para produzir a descarga. Considere que os eletrodos formam um capacitor de placas paralelas, cuja capacitância é dada por C $=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$, onde $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} F/m$, A é a área de cada eletrodo e d é a distância entre os eletrodos.



a) Calcule a capacitância da célula

b) A carga armazenada em um capacitor é proporcional à diferença de potencial aplicada, sendo que a constante de proporcionalidade é a capacitância. Se uma diferença de potencial igual a 100 V for aplicada nos eletrodos da célula, qual é a carga que será armazenada?

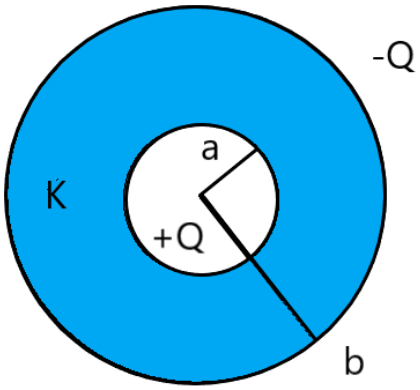
c) Se a carga encontrada no item b) atravessar o gás em 1μs (tempo de descarga), qual será a corrente média?

Solução:
a) $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = \dfrac{8,9.10^{-12}.600.200.10^{-12}}{100.10^{-6}} = 1,068.10^{-14}F$
b) $Q = CV \Rightarrow Q = 1,068.10^{-14}.100 = 1,068.10^{-12}C$
c) OBS: i (corrente elétrica); ΔQ (variação de carga elétrica); Δt (tempo transcorrido)

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1,068 \cdot 10^{-12}}{10^{-6}} A$$

4 Capacitor Esférico

É formado por cascas esféricas concêntricas e um material dielétrico (ε) entre elas. Sendo a e b os raios das cascas interna e externa, respectivamente. Para o cálculo da sua capacitância utilizaremos um resultado demonstrado na aula de potencial elétrico onde falamos sobre o potencial em uma esfera condutora. Sabemos que nesse caso, o potencial interior é igual a $\dfrac{kQ}{R}$ e no exterior, $\dfrac{kQ}{r}$.



Sejam +Q e -Q as cargas armazenadas nas cascas de raios a e b, respectivamente. Desse modo, utilizando o princípio da superposição, o potencial da casca de raio a é igual a:

$$V_a = \frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{b} \tag{6}$$

Por outro lado, o potencial na casca de raio b é dado por:

$$V_b = \frac{kQ}{b} - \frac{kQ}{b} = 0 \tag{7}$$

Agora, podemos calcular a sua capacitância:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{\frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{b}} \Rightarrow C = \frac{ab}{k(b-a)} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{(b-a)} \tag{8}$$

Observe que se b $\rightarrow \infty$ encontramos a capacitância de uma esfera de raio a:

$$C = 4\pi\varepsilon.\frac{ab}{(b-a)} = 4\pi\varepsilon\frac{a}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)} \tag{9}$$

Podemos representar a capacitância do capacitor esférico em função da constante dielétrica:

$$C = 4\pi K\varepsilon_0\frac{ab}{(b-a)} \tag{10}$$

4.1 Esfera Isolada

Podemos considerar uma esfera isolada como um capacitor esférico que tem sua placa externa no infinito.

Assim,

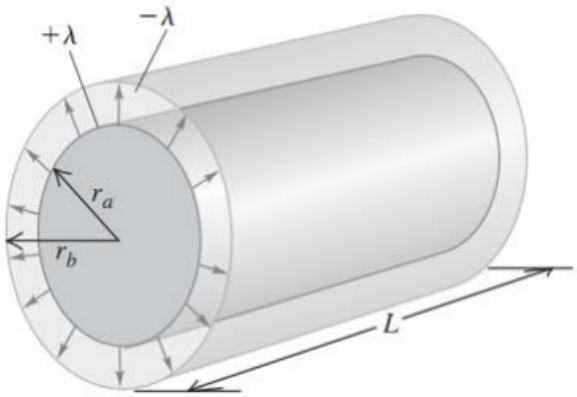
$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon\frac{a}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)} \Rightarrow b \rightarrow \infty \Rightarrow C \approx 4\pi\varepsilon_0 a \tag{11}$$

Para uma esfera de raio genérico r,

$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 r \tag{12}$$

5 Capacitor Cilíndrico

É formado por cascas cilíndricas coaxiais e um material dielétrico (ε) entre elas. Sendo a e b, onde b é maior do que a, os raios das cascas interna e externa, respectivamente e L a altura do capacitor. Na nossa última aula sobre campo elétrico, demonstramos que o campo entre duas cascas cilíndricas possui intensidade igual a $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon Lr}$. λ (densidade linear de carga); r (raio da gaussiana adotada a partir do eixo do cilindro); L (altura da gaussiana adotada a partir do eixo do cilindro).



Sejam +Q e -Q as cargas armazenadas nas cascas de raios a e b, respectivamente. Podemos calcular a diferença de potencial V entre as armaduras:

$$V = \int_a^b E dr \Rightarrow V = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon L r} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} \int_a^b \frac{1}{r} dr$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \tag{13}$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{14}$$

A partir deste resultado, calculamos a capacitância para o capacitor cilíndrico:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon L} ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

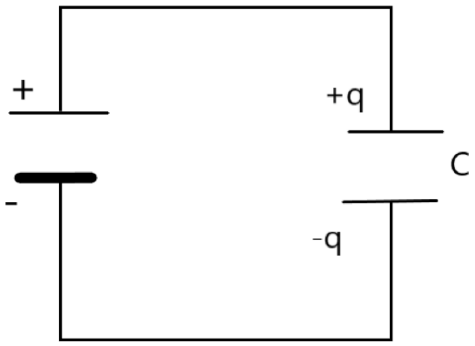
$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{15}$$

Em função da constante dielétrica, vem:

$$C = \frac{2\pi K \varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{16}$$

6 Energia armazenada por um capacitor

Considere uma carga q gradual no capacitor devido a uma bateria conectada em seus terminais, logo q varia de 0 até Q (carga final).



Seja V a diferença de potencial instantânea entre as armaduras do capacitor, logo $V = \frac{q}{C}$. Sendo q a carga gradual e C a capacitância.

Observe que o trabalho realizado pela bateria para adicionar uma carga dq é Vdq, assim:

$$dU = Vdq \Rightarrow dU = \frac{q}{C}dq \Rightarrow U = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q^2}{2C} \tag{17}$$

Como Q = CV, a energia pode ainda ser representada por outras expressões:

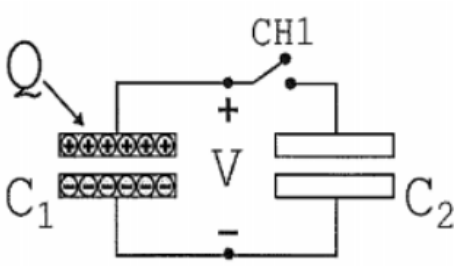
$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2} \tag{18}$$

As equações acima mostram que a capacitância mede a capacidade do capacitor de armazenar, simultaneamente, carga e energia. Quando um capacitor é carregado por meio de uma conexão a uma bateria ou por fonte que fornece uma diferença de potencial fixa V, então, se aumentamos o valor de C, obtemos uma carga maior Q = CV e uma quantidade maior de energia acumulada U = $\frac{CV^2}{2}$.

Quando o objetivo é transferir uma dada quantidade de carga Q de um condutor para outro, a Equação (13) mostra que o trabalho W necessário é inversamente proporcional a C; quanto maior for a capacitância, mais fácil será fornecer ao capacitor uma quantidade fixa de carga.

Exemplo: (Escola Naval)

Analise a figura abaixo:



O capacitor C_1 encontra-se inicialmente com uma tensão constante V = 4 volts. Já o capacitor C_2 estava descarregado. Fechando-se a chave CH1, o sistema atinge o equilíbrio com uma tensão de $\frac{4}{3}$ volts e redução de $\frac{8}{3}$ Joules da energia armazenada. A carga inicial Q, em coulombs, é igual a:

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{3}$

d) 2 c) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{3}$

Solução:

Abrindo-se a chave, o potencial de equilíbrio é o mesmo para os dois capacitores:

$$V_1 = V_2 = V_{eq} = \frac{4}{3} volt$$

Pelo princípio da conservação das cargas:

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

Calculando as energias antes e depois da abertura da chave:
Antes: $E_p = \frac{QV}{2}$
Depois: $E_{p_12} = \frac{Q_1V_1}{2} + \frac{Q_2V_2}{2} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} V_{eq} \Rightarrow E_{p12} = \frac{Q}{2} V_{eq}$
Fazendo a diferença das energias antes e depois da abertura da chave:

$$E_p - (E_p1 + E_p2) = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{QV}{2} - \frac{QV_{eq}}{2} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{Q}{2}(V - V_{eq}) = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{16}{3(V - V_{eq})} \Rightarrow Q = \frac{16}{3\left(4 - \frac{4}{3}\right)} = \frac{16}{3\left(\frac{8}{3}\right)} = \frac{16}{8}$$

$$\Rightarrow Q = 2C$$

Resposta: D

7 Força entre armaduras em um capacitor plano

Como provamos na nossa última aula a respeito de campo elétrico e Lei de Gauss, o campo gerado por uma das placas de um capacitor é dado por $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Este campo atua sobre as cargas distribuídas na outra placa. Tomando um elemento de carga dq da placa oposta, a forca dF que atua sobre ela é igual a:

$$dF = Edq \tag{19}$$

Onde E é o campo gerado por uma das placas. Logo:

$$dF = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dq \Rightarrow F = \int_0^Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dq \Rightarrow F = \int_0^Q \frac{Q}{2A\varepsilon_0}dq \Rightarrow F = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}\int_0^Q dq$$

$$\Rightarrow F = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_0} \tag{20}$$

Como as placas possuem sinais opostos, esta força é de atração.

8 Conclusões

Munidos destes conceitos fundamentais, estamos prontos para iniciar o estudo da associação de capacitores, transformações *delta* $\Leftrightarrow$ *estrela* e a influência de dielétricos em capacitores de forma mais aprofundada na próxima aula.