Campeonato de Física 2020

Vinicius Névoa

10 de Agosto

Problema 2 - Grupos B e C

Bósons Confinados

Introdução teórica

Diferente dos férmions, que obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli, qualquer número de bósons pode habitar um dado estado quântico. Em temperaturas altas, essa distinção entre férmions e bósons se torna irrelevante, e ambos obedecem a distribuição de Maxwell-Boltzmann, tal como um gás ideal clássico. Contudo, em temperaturas baixas, essa diferença entre bósons e férmions leva a comportamentos extremamente distintos. Um fenômeno exclusivamente bosônico que merece destaque é a Condensação de Bose-Einstein, que ocorre quando um gás de bósons é resfriado abaixo de uma certa temperatura crítica positiva T_c, fazendo com que uma parcela significativa dos bósons (que podem ser, por exemplo, átomos de potássio ou outros metais alcalinos) migre para o estado fundamental (aquele de menor energia). Vale ressaltar que essa condensação ocorre mesmo em um gás de bósons ideais, em que eles podem ser tratados como independentes e não-interagentes.

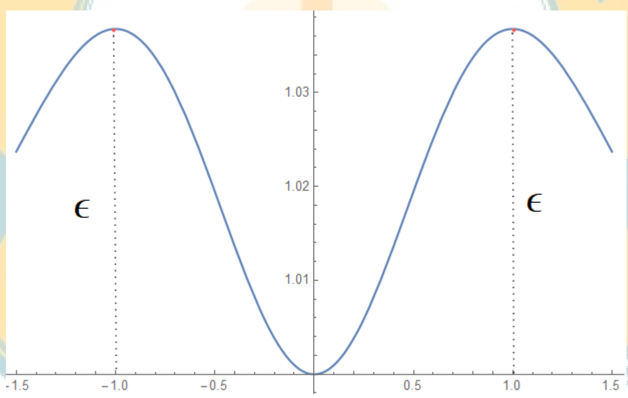
Curiosamente, esse fenômeno não ocorre naturalmente em 2 dimensões. Ou seja, se uma gás de bósons livres (sem a influência de forças externas) estiver restrito a se mover em uma superfície bidimensional, a quantidade de bósons no estado fundamental é desprezível por mais baixa que a temperatura seja. Contudo, caso esses bósons se encontrem confinados a um potencial harmônico como $V(x,y) = \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2}$ (esse confinamento pode ser feito por lasers, por exemplo), a condensação de Bose-Einstein volta a acontecer em uma temperatura $T_c > 0$. Nesses sistemas, embora as temperaturas sejam muito baixas, considere que sempre vale que $k_B T >> \hbar\omega$. No que segue, assuma que os bósons em questão tem spin nulo, de modo que cada estado de energia tenha que ser contado apenas uma vez, como seria feito classicamente.

O Problema - Parte 1

Experimentalmente, para manter as baixíssimas temperaturas necessárias para a condensação de Bose-Einstein, é importante confinar os bósons no espaço (em um dado volume efetivo V que depende do comprimento característico dos osciladores harmônicos). **Determine** a diferença da temperatura crítica de condensação de um gás de N bósons em 3D e em 2D, $\Delta T = T_{c,3D} - T_{c,2D}$, quando em ambos os casos o gás é confinado por osciladores harmônicos independentes e de mesmo ω em todas as direções. Além disso, em **qual** dos casos o condensado de Bose-Einstein se forma mais rápido a medida que a temperatura desce abaixo da respectiva temperatura crítica?

O Problema - Parte 2

Por simplicidade, daqui para frente trate apenas do caso do gás confinado em 2 dimensões.
A armadilha de osciladores harmônicos que confina o gás de bósons ocupa uma região finita no espaço, e portanto tem um potencial como o da figura representativa:



Considere o regime semi-clássico em que qualquer partícula com energia superior a ϵ escapa da armadilha e em que não há tunelamento ocorrendo.

Embora possamos tratar os níveis de energia como os de um oscilador harmônico ideal, esse oscilador truncado possui a curiosa propriedade de resfriar ainda mais o gás de bósons. Considerando que, antes de ser confinado, o gás já foi resfriado até sua temperatura crítica T_c, **mostre** que sua temperatura abaixará aproximadamente segundo a função $T(t) = T_c e^{-kt}$, e **ache** o valor de k no limite em que a altura da barreira ϵ é numericamente muito menor que a constante de Boltzmann.

Através de um **gráfico** que registra T (temperatura) versus t (tempo), explique como esse resfriamento realmente ocorre. Seu esboço deve conter a escala de tempo para o gás termalizar, s_1, e a escala de tempo para partículas com energia acima da barreira escaparem, s_2, valendo que $s_1 >> s_2$ (aproximação de gás rarefeito). Seu gráfico também deve conter explicitamente o comportamento quando $t \longrightarrow \infty$.

Definição matemática

Você vai precisar da seguinte função especial na sua solução, chamada de função polilogarítimica. É permitido deixar a resposta em termos de valores dessas funções, definidas para $z \leq 1$:

$Li_s(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^s}$

$Li_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}dx}{z^{-1}e^x - 1}$, em que $\Gamma(s)$ é a função gama.

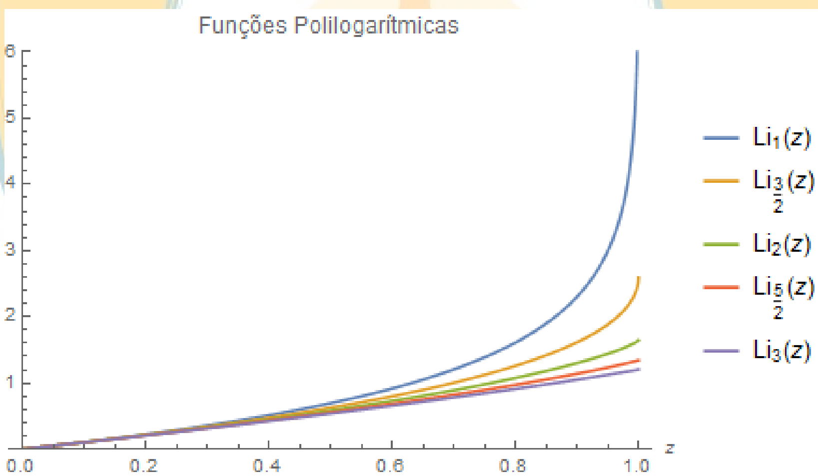


Figure 1: Alguns exemplos dessa família de funções

Com exceção da definição dessa função especial acima, esse problema não requer matemática avançada.