

# Campeonato de Física 2020

Vinícius F. Rodrigues

7 de Setembro

## Solução do Problema 1 - Grupos B e C O paradeiro quântico eletromagnético

### Demonstração

#### Considerações iniciais

Primeiramente, deve ser levado em conta que a interação de campos elétricos e magnéticos armazena momento angular intrínseco aos campos (ver [Apêndice](#)), diferentemente do momento angular comumente conhecido que é meramente mecânico, apesar de que o mesmo também possa se manifestar de forma mecânica em alguns casos, como será demonstrado.

Dessa forma, serão apresentados dois métodos para calcular o momento angular armazenado nos campos gerados por cargas elétricas e magnéticas, o qual deverá existir de forma independente da posição do suposto monopolo (assim como não será necessário que haja qualquer velocidade inicial).

#### Campo de um monopolo magnético

Sabe-se que devido ao fato de que as equações de Maxwell para o campo de um monopolo e um dipolo magnético são análogas as mesmas para o caso elétrico, isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

O que faz com que o campo dos dipolos elétricos e magnéticos sejam análogos ao satisfazerem, também, a condição de potencial igual a zero no infinito. Ou, como já é conhecido em coordenadas polares:

$$\vec{E}_{dip} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

;

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

Dessa forma, sabendo que o campo de um dipolo elétrico nada mais é que a superposição de dois campos coulombianos  $\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ , conclui-se a analogia ao assumir que, da mesma forma, o campo de uma carga magnética deverá ser análogo à Lei de Coulomb para satisfazer as equações de Maxwell e o campo de um dipolo, isto é, um dipolo magnético pode ser interpretado como um par de monopólos ( $m = q_m d$ ). Logo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}$$

A analogia acima também pode ser justificada ao comparar, também, as equações de densidade de energia dos campos:

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

;

$$u_e = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

*Método 1. Cálculo do Momento Angular através do Vetor de Poynting*

Considere uma carga elétrica localizada na origem de um sistema de coordenadas e uma carga magnética a uma distância  $d$  como mostra a figura:

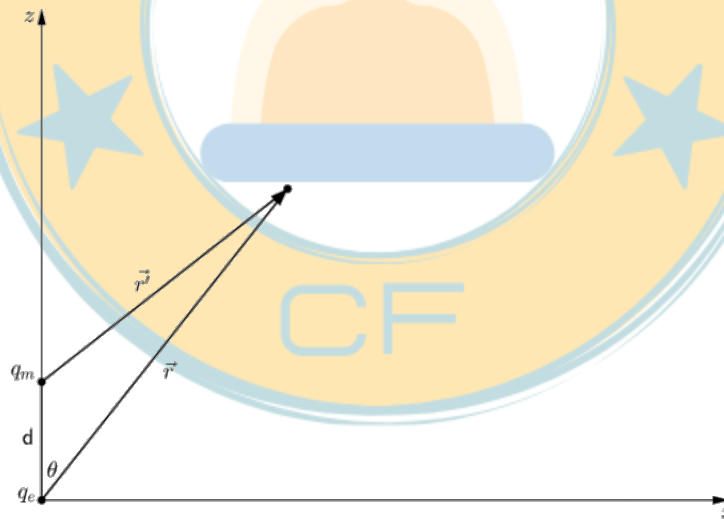


Figura 1. Representação bidimensional em  $\phi = 0$

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} ; \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r'^2} \hat{r}' ; \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

;

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta ; \vec{r}' = \vec{r} - d\hat{z}$$

Sabe-se que a densidade volumétrica de momento linear armazenado nos campos  $\vec{\varphi}$  pode ser escrita em função do Vetor de Poynting  $\vec{S}$ :

$$\vec{\varphi} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{16\pi^2} \frac{\vec{r} \times \vec{r}'}{(rr')^3} = -\frac{\mu_0 q_e q_m}{16\pi^2} \frac{d \text{sen} \theta}{r^2 r'^3} \hat{y}$$

Aplicando o produto vetorial entre o vetor posição e a densidade de momento linear, obtém-se a densidade de momento angular  $\vec{l}$ :

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\varphi} = -\frac{\mu_0 q_e q_m}{16\pi^2} \frac{d \text{sen} \theta}{r r'^3} (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \text{sen} \phi \hat{y} - \text{sen} \theta \hat{z})$$

Então, ao integrar a densidade de momento angular por todo o volume do espaço, calcula-se o momento angular total armazenado nos campos:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{l} dV = \\ &= -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{16\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \theta}{r r'^3} (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \text{sen} \phi \hat{y} - \text{sen} \theta \hat{z}) r^2 \text{sen} \theta d\theta dr d\phi \end{aligned}$$

Porém, nota-se que os termos  $\cos \phi$  e  $\text{sen} \phi$  nas componentes  $x$  e  $y$  tornam a integral em  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  igual a zero, anulando essas componentes, o que condiz com a simetria dos campos e do sistema de coordenadas adotado. Assim, tem-se:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \text{sen}^3 \theta \hat{z} d\theta dr$$

A integral em  $r$  pode ser resolvida ao utilizar a dica dada no início do problema. Com isso, ao fazer a substituição  $u = \cos \theta$  ( $\text{sen} \theta = \sqrt{1 - u^2}$ ) e, consequentemente,  $du = -\text{sen} \theta d\theta$ , obtém-se:

$$\vec{L} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi} \int_1^{-1} \frac{1 - u^2}{d(1 - u)} \hat{z} du = -\frac{\mu_0 q_e q_m}{8\pi} \int_1^{-1} (1 + u) \hat{z} du$$

Finalmente,

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi} \hat{z}$$

### *Método 2. Analogia ao Paradoxo do disco de Feynman*

Como ficou evidente, o método 1 é demasiadamente complicado do ponto de vista matemático, usando integrais nada triviais. Por isso, partindo para uma abordagem mais simplificada e condizente com o nível olímpico, pode-se recorrer a uma analogia bastante engenhosa (assim como recomendado na DICA 2 do problema).

#### **1. O Paradoxo do disco de Feynman**

O mencionado paradoxo consiste em fazer fluir, momentaneamente, uma corrente por um disco metálico inicialmente aterrado e imerso num campo magnético. Dessa forma, nota-se que o disco adquire uma velocidade angular e, portanto, um momento angular. Já que nenhum agente externo move o disco e apenas forças naturais causadas pelo campo magnético atuam, teria sido a conservação do momento angular violada? De onde vem esse momento?

Apesar do caráter intrigante do problema proposto por Feynman, percebe-se que nenhuma lei da física foi violada ao considerar o fato já apresentado de que a interação do campo magnético já existente com o campo elétrico gerado pela corrente de cargas fluindo pelo disco armazena momento angular. Portanto, o momento mecânico que surge no disco advém do momento intrínseco aos campos que, ao ser cessada a corrente, foi transferido integralmente ao disco, havendo, assim, conservação do momento angular.

#### **2. A analogia ao Paradoxo**

Sabendo disso, nota-se que o momento angular dos campos pode ser encontrado ao, simplesmente, "desligar" um dos campos. Dessa forma, o momento será transmitido para uma partícula, fazendo com que seja possível calculá-lo através de um tratamento clássico.

Considere uma fina placa plana de área  $A$  uniformemente carregada com uma carga total  $q_e$ . Ao aterrar a placa, essa perde rapidamente a sua carga. Nesse processo de descarga, o campo elétrico da placa varia até se tornar nulo, gerando, assim, um campo magnético azimutal, que pode ser calculado pela Lei de Ampere corrigida por Maxwell:



Figura 2. Monopolo  $q_m$  e plano de carga uniforme  $q_e$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} ; \Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Desprezando efeitos de borda, o campo elétrico da placa carregada é uniforme e de módulo conhecido pelo seu resultado proveniente da Lei de Gauss,  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  ( $\sigma = \frac{Q}{A}$ ), assim, o campo magnético gerado será azimutalmente uniforme. Com isso, tomando um intervalo de tempo tendendo a zero, considere linear a taxa de variação do campo elétrico, ou seja,

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta t} = -\frac{\sigma A}{2\varepsilon_0 \Delta t} = -\frac{q_e}{2\varepsilon_0 \Delta t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{q_e}{2\varepsilon_0 \Delta t}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 q_e}{4\pi r} \frac{1}{\Delta t} \hat{\theta}$$

Sendo assim, caso haja uma carga magnética em uma distância  $r$  do centro da placa, essa sofrerá a ação do campo magnético, sendo acelerada na direção tangencial do seu novo movimento circular. Calculando o torque, podemos encontrar o momento angular transmitido ao monopolo:

$$\vec{F}_m = q_m \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \rightarrow r q_m \frac{\mu_0 q_e}{4\pi r} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$L = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}$$

**OBS:** O campo elétrico acima só é considerado uniforme para planos paralelos próximos à placa, impondo a condição de que a carga magnética só poderia estar a uma pequena distância no eixo perpendicular à placa, mas em qualquer lugar dos planos paralelos (qualquer posição nos eixos  $x$  e  $y$ , mas apenas pequenos valores de coordenada  $z$ ), ou seja, aparentemente, limitando a análise feita a apenas dois "graus de liberdade" para o monopolo. Entretanto, para qualquer que seja a posição do monopolo no universo, pode-se ajustar a posição da placa para que as condições sejam satisfeitas. Contudo, esse momento angular existe independente da posição da placa, apenas foi imposto essa condição para que fosse viável fazer o cálculo.

### A quantização das cargas

Foi demonstrado que o momento angular armazenado por um par de cargas elétrica e magnética independe da posição e da velocidade dessas.

Para, então, demonstrar a quantização, pode-se considerar a quantização do momento angular presente nas ondas eletromagnéticas formadas por esses campos (ou simplesmente nos fótons, semelhante à quantização de Bohr):

$$L = n\hbar$$

$$\frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi} = n\hbar; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$q_e q_m = n \frac{2h}{\mu_0}$$

Tal relação entre o produtos das cargas só pode ser satisfeita se ambos  $q_e$  e  $q_m$  forem quantizados em múltiplos de uma carga elementar característica, caso contrário, o produto  $q_e q_m$  poderia assumir qualquer valor real, enquanto o lado direito da equação estaria restrito a múltiplos de  $\frac{2h}{\mu_0}$ .

Desse modo, a simples existência de apenas uma carga magnética em qualquer lugar do universo, próximo ou distante, não só justifica a misteriosa quantização da carga elétrica, como também aponta para uma nova quantização, a das cargas magnéticas.

Dito isso, pode-se deduzir uma expressão para a carga elementar dos monopolos magnéticos, tomando os menores múltiplos de cada quantização ( $n = 1$ ) e lembrando da carga elétrica elementar já conhecida  $e$ :

$$q_m = n \frac{2h}{e\mu_0}$$

$$e_m = \frac{2h}{e\mu_0} \approx 6,58 \times 10^{-9} C \cdot \frac{m}{s}$$

### Uma análise adicional

Uma consequência dessa demonstração pode ser notada ao comparar as forças entre cargas magnéticas e a força de Coulomb de cargas elementares:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e_m^2}{r^2}$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 e_m^2}{e^2} = \frac{1}{c^2} \frac{e_m^2}{e^2} \approx 1,88 \times 10^4$$

Ou seja, para uma mesma distância, a força entre duas cargas magnéticas elementares seria da ordem de  $10^4$  vezes mais forte que a força entre duas cargas elétricas elementares, o que, comparativamente, é mais intensa do que Força Nuclear Forte em núcleos atômicos (a qual é da ordem de  $10^3$  vezes mais forte que a elétrica no núcleo). Isso indica que cargas magnéticas de sinais opostos poderiam formar ligações muito intensas, mas as de mesmo sinal iriam se repelir fortemente, não podendo ser facilmente retidas, por exemplo, em núcleos atômicos. Dessa forma, essa força de tamanha intensidade poderia começar a explicar o paradeiro dessas partículas em nosso universo observável.

## Detecção de cargas magnéticas

### Novas equações de Maxwell

Considerando o já demonstrado formato dos campos magnéticos de cargas magnéticas análogo ao caso elétrico, surge uma "Lei de Gauss" para o magnetismo que pode ser demonstrado da mesma forma que a lei original, mas que se faz desnecessário para os propósitos em questão.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$

Sendo,  $\mu_0$  o equivalente magnético a  $\epsilon_0^{-1}$ , e  $\rho_m$  a densidade de carga magnética.

O mesmo acontece para a equação do rotacional do campo elétrico, ou seja, surge uma "Lei de Ampere" análoga para o campo elétrico, já que cargas elétricas em movimento geram um campo magnético, as cargas magnéticas em movimento devem gerar campo magnético para manter a simetria das equações de Maxwell (o que é equivalente a supor uma equação da continuidade para o fluxo de correntes magnéticas):

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### Detecção

#### Método 1. Influência em ondas eletromagnéticas

Aplicando o rotacional à "Lei de Ampere" do campo elétrico, obtem-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Para simplificar a análise, serão considerados meios resistivos que obedecem tanto a Lei de Ohm original quanto uma análoga para um meio com condutividade magnética  $\sigma_m$ , ou seja,  $\vec{J}_e = \sigma_e \vec{E}$  e  $\vec{J}_m = \sigma_m \vec{B}$ . Então, substituindo as equações de Maxwell,

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 (\sigma_e + \mu_0 \varepsilon_0 \sigma_m) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0^2 \sigma_e \sigma_m \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_e$$

Porém, ao substituir a Lei de Ohm e a Lei de Gauss na equação da continuidade ( $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0$ ), encontra-se um decaimento exponencial das densidades de carga em meios condutores ( $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0} \rho_e$ ), o que já é esperado, já que as cargas em condutores tendem a permanecer em sua superfície.

Assim, só resta a equação de onda amortecida no espaço e no tempo, haja vista a equação diferencial temporal de segunda ordem no lado direito:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 (\sigma_e + \mu_0 \varepsilon_0 \sigma_m) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0^2 \sigma_e \sigma_m \vec{E}$$

Já é notável que essa equação é diferente da equação de onda tradicionalmente encontrada para meios eletricamente condutores, fazendo com que não só o valores de comprimento de onda e frequência fossem alterados para uma onda eletromagnética que passasse por um meio com cargas magnéticas, mas também essa onda simplesmente decairia com o tempo até perder completamente a sua intensidade, o que torna evidente o meio de detectar acúmulos de cargas magnéticas por meio de ondas eletromagnéticas ao investigar o seu desaparecimento.

Além disso, se fizermos uma análise quantitativa ao resolver a equação diferencial, nota-se algo ainda mais intrigante. Considere agora um caso unidimensional para simplificar os cálculos e faça  $E(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ . Resultando em duas equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = C f(x) \rightarrow f(x) = A e^{\sqrt{C}x} + B e^{-\sqrt{C}x}$$

$$C g(t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} + \mu_0 (\sigma_e + \mu_0 \varepsilon_0 \sigma_m) \frac{\partial g(t)}{\partial t} + \mu_0^2 \sigma_e \sigma_m g(t) \rightarrow$$

$$g(t) = A' e^{\lambda_+ t} + B' e^{\lambda_- t}$$

Em que  $A, B, C, A', B'$  são constantes e  $\lambda_+, \lambda_-$  são as soluções da equação característica:

$$0 = \mu_0 \varepsilon_0 \lambda^2 + \mu_0 (\sigma_e + \mu_0 \varepsilon_0 \sigma_m) \lambda + \mu_0^2 \sigma_e \sigma_m - C$$

Dessa maneira,  $E$  pode ser reescrito em função de uma frequência angular de oscilação  $\omega$  e um número de onda  $k$ :

$$E(x, t) = E_0 e^{-k'x - \omega' t} \cos(\omega t - kx + \phi)$$



Em que  $k', k, \omega$  e a fase  $\phi$  podem ser encontrados substituindo  $E(x, t)$  na equação diferencial original, e  $\omega'$  é o módulo da parte real de  $\lambda$ , ou simplesmente  $\left| \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2} \right|$ . Da equação característica:

$$\omega' = \left| \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2} \right| = \frac{b}{2a} = \frac{\mu_0(\sigma_e + \mu_0 \varepsilon_0 \sigma_m)}{2\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} + \frac{\mu_0 \sigma_m}{2}$$

Considerando que a condutividade elétrica de materiais é, em geral, um número de ordens elevadas, sendo da ordem de  $10^6$  para metais como o cobre, o termo  $\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$  é da ordem de  $10^{16}$ , isto é, o fator de decaimento temporal é extremamente alto, tornando o desaparecimento da intensidade da onda súbito e quase instantâneo. Isso significa que o efeito das cargas magnéticas sobre as ondas eletromagnéticas é bem significativo, o que tornaria evidente a presença dessas partículas ao notar a perda súbita de sinal eletromagnético. Por outro lado, se elas estivessem presentes de forma abundante em nosso universo, a própria existência da luz seria fortemente afetada.

#### *Método 2. Espiras supercondutoras*

Um método popular de detecção de cargas magnéticas, por ser baseado em experimentos realizados no CERN (Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear), consiste em usar espiras supercondutoras com medidores de corrente de alta precisão para detectar as correntes induzidas pela passagem dessas partículas, já que, como prevê a equação de Maxwell modificada para  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ , há um efeito análogo à Lei de Lenz-Faraday:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_m \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} - \mu_0 I_m \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon_{ind} &= -L \frac{\partial I_{ind}}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} - \mu_0 I_m ; I_m = \frac{dq_m}{dt} \\ LI_{ind} &= \Delta \Phi_m + \mu_0 \Delta q_m \end{aligned}$$

Contudo, como a espira é supercondutora, essa tem resistência nula e, conseqüentemente, não varia o fluxo magnético  $\Phi_m$ , ou seja,  $\Delta \Phi_m = 0$ . Logo:

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 \Delta q_m}{L}$$

Onde  $L$  é a indutância da espira,  $\Delta q_m$  é a quantidade de carga magnética que atravessa a espira e  $I_{ind}$  é corrente induzida na espira, que é medida pelo aparelho. Desse modo, é possível detectar a passagem de cargas magnéticas e, também, calcular o seus valores.

## Apêndice

A demonstração para a equação da densidade de momento linear armazenado na interação dos campos magnético e elétricos advém da mesma demonstração do conceito de Tensor das tensões de Maxwell (recomenda-se *David J. Griffiths - Eletrodinâmica, capítulo 8, seção 8.2.2*), o qual será abordado em um futuro material do CF no site <http://ampulhetadosaber.com/fisica/cf/>.

