

Campeonato de Física - Problema 3

Lucas Takayasu

18 de agosto de 2020

1. Convenções

Para resolver o problema iremos trabalhar com o Geogebra fazendo várias construções geométricas, e para facilitar a visualização utilizaremos uma convenção de cores:

Eixo óptico, Plano focal, Bamboê, Plano da lente, Raios de luz, Trajetória do centro do bamboê, Fontes pontuais, Imagem, Ângulos no sentido horário, Ângulos no sentido anti-horário, Construções auxiliares.

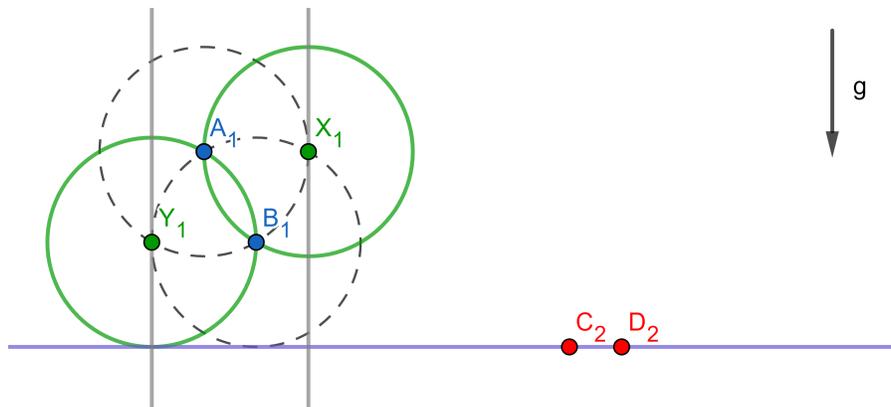
X e Y são referentes aos possíveis centros do bamboê. M é referente a ponto médio.

2. Parte I

2.1 Considerações

- Sabendo que os pontos C_2 e D_2 são imagens reais, concluímos que a lente é convergente, já que a formação de imagens reais é impossível em lentes divergentes.
- Objetos (pontos objeto) no eixo óptico formam imagens (pontos imagem) no eixo óptico.

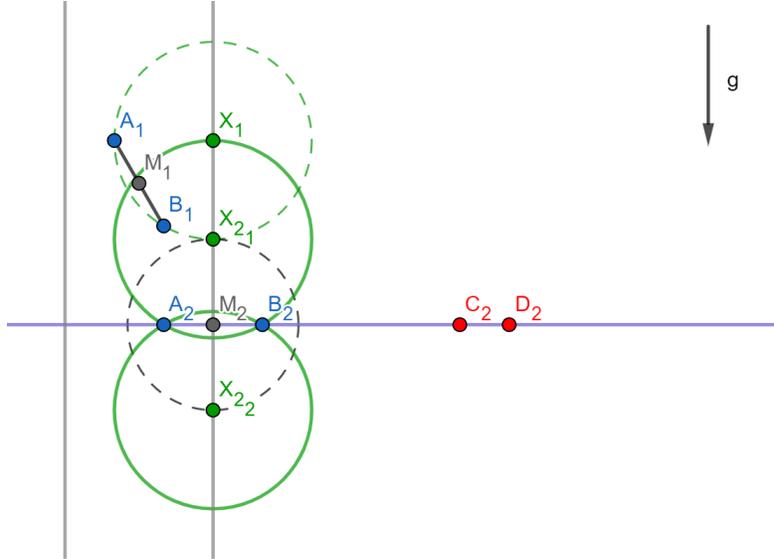
Sabendo que o menor arco formado pelas fontes possui uma abertura $\alpha = \pi/3 = 60^\circ$, podemos encontrar as possíveis posições do bamboê em $t = t_1$, já que o triângulo formado pelo centro do bamboê, A_1 e B_1 será equilátero. Para isso podemos utilizar de alguns círculos auxiliares para encontrar X_1 e Y_1 . Isso nos dá duas opções para a posição inicial do bamboê. Também podemos traçar o eixo óptico da lente que passa por C_2 e D_2 . Sabemos que a gravidade é perpendicular a esta reta e também que seu produto escalar com o vetor $\overrightarrow{A_1B_1}$ é positivo, logo sabemos a direção e o sentido da gravidade (representados na imagem abaixo), e logo podemos determinar a trajetória do centro do bamboê, que terá a mesma direção que a gravidade, portanto:



Como os pontos C_2 e D_2 (imagens das fontes pontuais) estão no eixo óptico, sabemos que no instante $t = t_2$ as fontes pontuais também estarão no eixo óptico, ou seja, A_2 e B_2 estarão no eixo óptico.

2.2 Caso 1

Vamos primeiro analisar o caso do bambolê centrado em X_1 . Considerando que A_2 e B_2 estarão no eixo óptico, podemos descobrir as possíveis posições do bambolê em $t = t_2$. Para isso podemos definir um ponto M_1 no ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$. A distância de M_1 até X_1 é a altura $(r\sqrt{3}/2)$ do triângulo equilátero $\triangle A_1B_1X_1$. Já que A_2 e B_2 estarão no eixo óptico, M_2 , o ponto médio de $\overline{A_2B_2}$, também estará, logo podemos utilizar a ferramenta compasso para traçar um círculo cujo raio é igual a M_1X_1 mas centrado em M_2 , ou seja, na intersecção entre a trajetória do bambolê e o eixo óptico. Com isso encontramos X_{2_1} e X_{2_2} , os possíveis centros do bambolê em t_2 , sendo estes pontos a intersecção entre o círculo centrado em M_2 e a trajetória do bambolê. Com isso também encontramos A_2 e B_2 , já que estes serão a intersecção do bambolê em t_2 com o eixo óptico.



Na ilustração o A_2 está mais a esquerda, mas isso é apenas uma das possibilidades: aquela do bambolê centrado em X_{2_1} ; o B_2 poderia estar na esquerda se considerássemos a segunda possibilidade: do bambolê centrado em X_{2_2} .

Sabemos também que o plano da lente, assim como os planos focais, deverão estar na direita de B_2 e à esquerda de C_2 (entre B_2 e C_2), pois apenas dessa forma é possível a formação das imagens reais C_2 e D_2 a partir das fontes pontuais no instante t_2 . Ademais, se o A_2 estiver na esquerda o C_2 será sua imagem, e a imagem de B_2 seria D_2 ; mas se o B_2 estiver na esquerda o C_2 seria sua imagem, e a imagem de A_2 seria D_2 . Podemos notar isso pela equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \downarrow p' = \frac{f}{1 - \frac{f}{p} \uparrow} \quad (1)$$

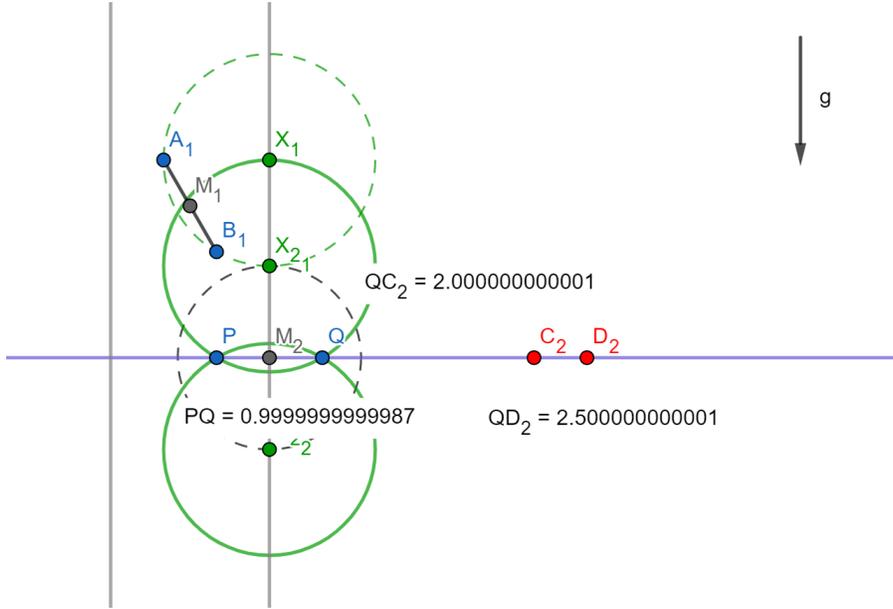
Quanto maior p menor p' , ou quanto mais a esquerda o objeto (mais afastado da lente) mais a esquerda a imagem (mais próxima da lente) e vice-versa. Além disso, pela equação de Gauss podemos calcular a posição da lente e sua distância focal. Para considerar ambas as possibilidades apresentadas acima, chamaremos o ponto mais a direita de Q e o mais a esquerda de P . Iremos chamar a posição da lente (sua distância até Q) de l e sua distância focal de f . Com isso temos pela geometria:

$$p_Q = l \quad e \quad p'_Q = QD_2 - l \quad e \quad p_P = l + PQ \quad e \quad p'_P = QC_2 - l \quad (2)$$

Aplicando na equação de Gauss chegamos num sistema de duas variáveis:

$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{l} + \frac{1}{QD_2 - l} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{l + PQ} + \frac{1}{QC_2 - l} \end{cases} \quad (3)$$

Podemos medir todas essas distâncias pela ferramenta de distância (O geogebra apresenta alguns erros pela alta quantidade de algarismos decimais):



$$QD_2 = 2.5 \quad e \quad PQ = 1 \quad e \quad QC_2 = 2 \quad (4)$$

Resolvendo o sistema em (3):

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{2.5 - l} = \frac{1}{l + 1} + \frac{1}{2 - l} \Rightarrow \frac{2.5}{-l^2 + 2.5l} = \frac{3}{-l^2 + l + 2} \Rightarrow l^2 - 10l + 10 = 0 \quad (5)$$

Disso chegamos numa equação de 2º grau com duas raízes distintas:

$$l_1 = 5 + \sqrt{15} \approx 8.87m \quad l_2 = 5 - \sqrt{15} \approx \boxed{1.13m} \quad (6)$$

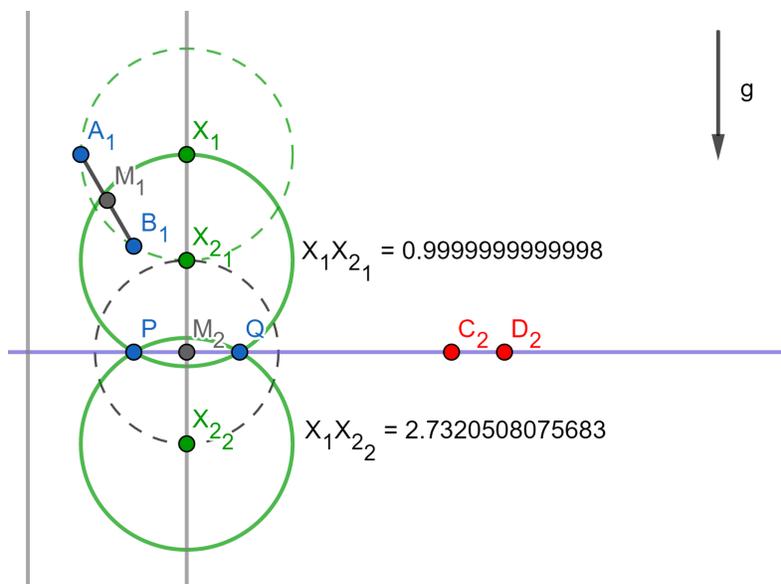
Porém, apenas a solução l_2 faz sentido físico, pois sabemos que as imagens C_2 e D_2 são reais, logo suas distâncias devem ser positivas pelas convenções da equação de Gauss, e substituindo esses valores de l na equação (2), especificamente nas expressões $p'_Q = QD_2 - l$ e $p'_P = QC_2 - l$ referentes as imagens reais, notamos que l_1 corresponde a p'_Q e p'_P negativos ($2.5 - 8.87 = -6.37 < 0$ e $2 - 8.87 = -6.87 < 0$), logo podemos descartar a solução l_1 . Terminando de resolver o sistema (3):

$$f = \frac{l(QD_2 - l)}{QD_2} = \frac{(5 - \sqrt{15})(2.5 - 5 + \sqrt{15})}{2.5} \approx \boxed{0.619m} \quad (7)$$

Para calcular o ω , primeiro precisamos do $\Delta t = t_2 - t_1$. Podemos descobrir Δt a partir da cinemática da queda livre, já que o bambolê parte do repouso:

$$\Delta s = \frac{g\Delta t^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta s}{g}} \quad (8)$$

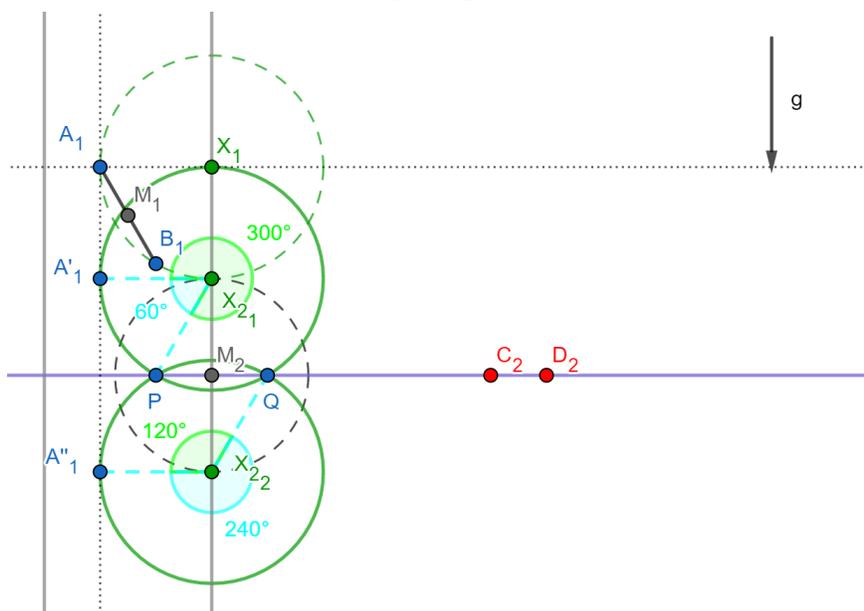
Os Δs podem ser medidos no Geogebra:



Substituindo os valores em (8), podemos calcular os dois Δt , sendo Δt_1 referente ao babilô centrado em X_{2_1} e Δt_2 ao em X_{2_2} :

$$\Delta t_1 \approx 0.452s \quad e \quad \Delta t_2 \approx 0.746s \quad (9)$$

Podemos medir a variação do ângulo fazendo uma “projeção” de A_1 (Poderíamos fazer com B_1 também) no babilô em t_2 , e como o babilô poderia ter dado mais voltas devemos somar este valor com $2\pi n$, onde n é o número de voltas. Lembrando que para X_{2_1} o ponto P corresponde à A_2 , e para X_{2_2} o ponto Q corresponde à A_2 . Para o ω podemos usar a cinemática angular com a equação $\omega = \Delta\theta/\Delta t$, mas precisaremos considerar mais duas possibilidades: rotação no sentido horário ou no anti-horário, além das duas possibilidades do babilô centrado em X_{1_1} e X_{1_2} , e logo chegaremos em 4 situações:



• **Babilô centrado em X_{2_1}**

No sentido horário temos que:

$$\omega = \frac{5\pi}{3\Delta t_1} + \frac{2\pi n}{\Delta t_1} \approx \boxed{(11.6 + 13.9n)rad/s} \quad (10)$$

No sentido anti-horário:

$$\omega = \frac{\pi}{3\Delta t_1} + \frac{2\pi n}{\Delta t_1} \approx \boxed{(2.32 + 13.9n)rad/s} \quad (11)$$

• **Bambolê centrado em X_{2_2}**

No sentido horário temos que:

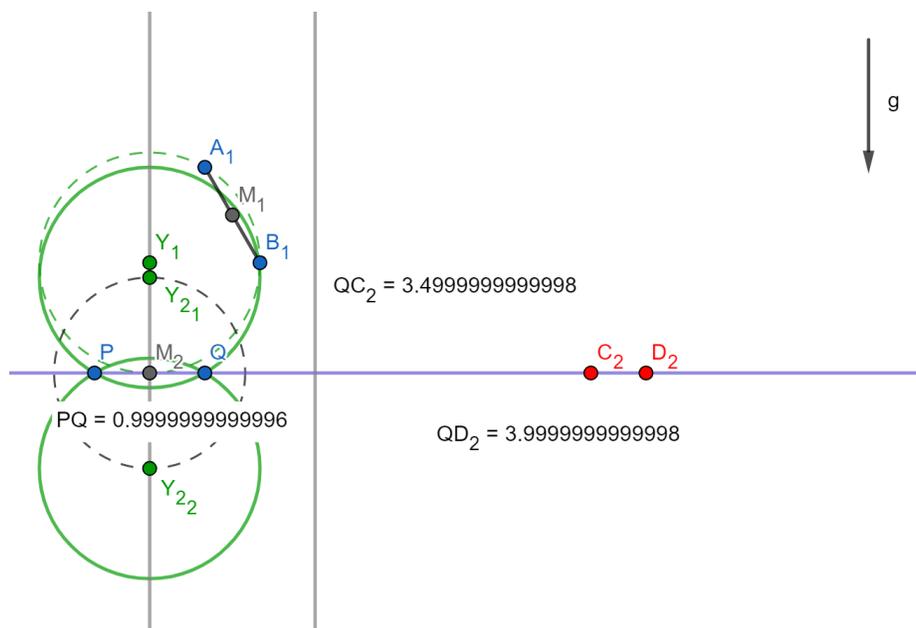
$$\omega = \frac{2\pi}{3\Delta t_2} + \frac{2\pi n}{\Delta t_2} \approx \boxed{(2.81 + 8.42n)rad/s} \quad (12)$$

No sentido anti-horário:

$$\omega = \frac{4\pi}{3\Delta_2 t} + \frac{2\pi n}{\Delta t_2} \approx \boxed{(5.61 + 8.42n)rad/s} \quad (13)$$

2.3 Caso 2

No caso do bambolê centrado em Y_1 a construção e o procedimento serão análogos, a única diferença serão as distâncias:



$$QD_2 = 4 \quad e \quad PQ = 1 \quad e \quad QC_2 = 3.5 \quad (14)$$

Para calcular as possíveis distâncias focais e posições da lente utilizaremos novamente a equação de Gauss:

$$p_Q = l \quad e \quad p'_Q = QD_2 - l \quad e \quad p_P = l + PQ \quad e \quad p'_P = QC_2 - l \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{l} + \frac{1}{QD_2 - l} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{l + PQ} + \frac{1}{QC_2 - l} \end{cases} \quad (16)$$

Resolvendo o sistema em (16):

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{4-l} = \frac{1}{l+1} + \frac{1}{3.5-l} \Rightarrow \frac{4}{-l^2+4l} = \frac{4.5}{-l^2+2.5l+3.5} \Rightarrow l^2 - 16l + 28 = 0 \quad (17)$$

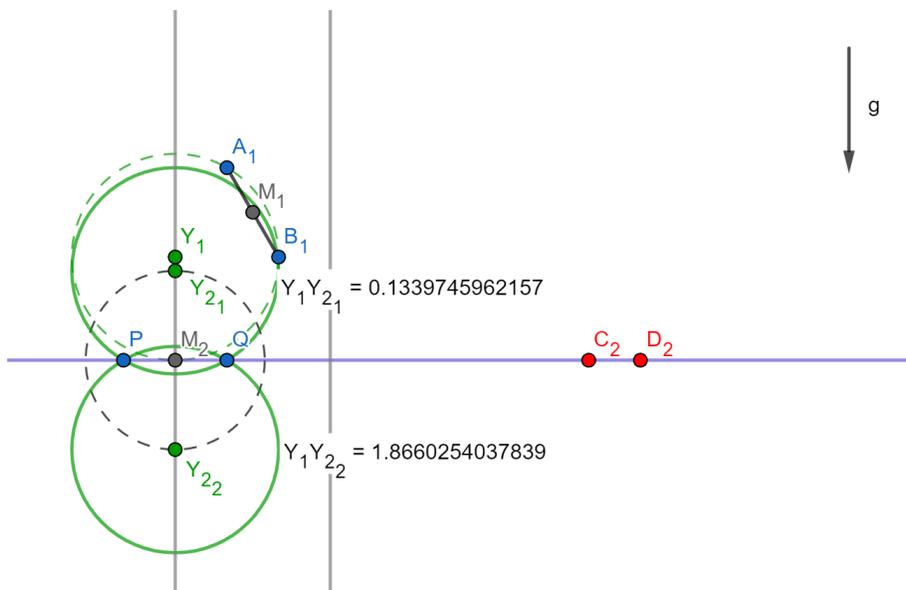
Novamente, chegamos numa equação de 2º grau com duas raízes distintas:

$$l_1 = \boxed{2.00m} \quad l_2 = 14.0m \quad (18)$$

E de forma análoga, apenas a solução l_1 faz sentido físico, já que substituindo esses valores de l na equação (15), especificamente nas expressões $p'_Q = QD_2 - l$ e $p'_P = QC_2 - l$ referentes as imagens reais, notamos que l_2 corresponde a p'_Q e p'_P negativos ($4 - 14 = -10 < 0$ e $3.5 - 14 = -10.5 < 0$), logo podemos descartar a solução l_2 . Terminando de resolver o sistema (16):

$$f = \frac{l(QD_2 - l)}{QD_2} = \frac{2(4 - 2)}{4} = \boxed{1.00m} \quad (19)$$

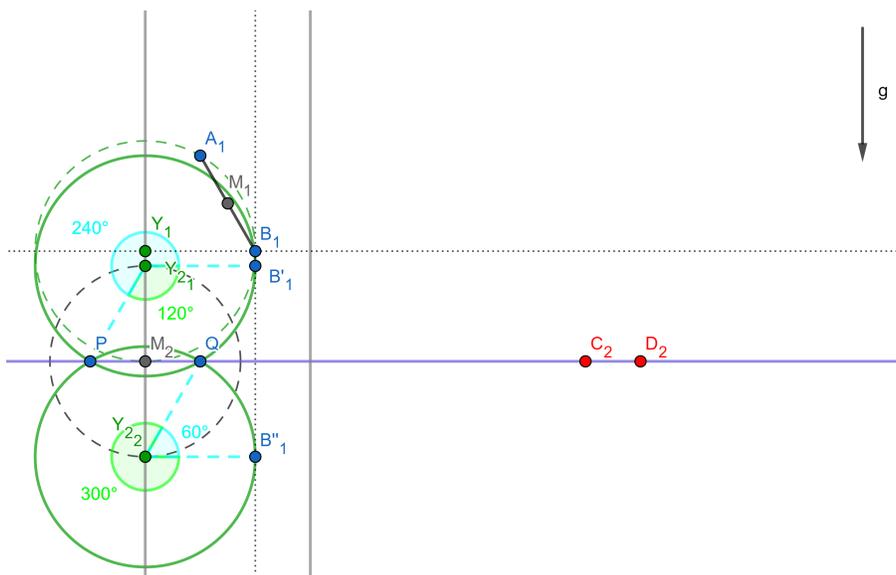
Para calcular os possíveis ω precisamos dos deslocamentos do bambolê, e das variações de ângulo:



$$(8) : \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta s}{g}} \Rightarrow \Delta t_1 \approx 0.165s \quad e \quad \Delta t_2 \approx 0.617s \quad (20)$$

Sendo que Δt_1 é referente ao bambolê centrado em Y_{2_1} e Δt_2 ao em Y_{2_2} .

Diferente do caso 1, agora “projetaremos” B_1 no bambolê em t_2 para calcularmos as variações de ângulo, e sabemos que para Y_{2_1} o ponto P corresponde à B_2 , e para Y_{2_2} o ponto Q corresponde à B_2 .



- **Bambolê centrado em Y_{2_1}**

No sentido horário temos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{3\Delta t_1} + \frac{2\pi n}{\Delta t_1} \approx \boxed{(12.7 + 38.0n)rad/s} \quad (21)$$

No sentido anti-horário:

$$\omega = \frac{4\pi}{3\Delta t_1} + \frac{2\pi n}{\Delta t_1} \approx \boxed{(25.3 + 38.0n)rad/s} \quad (22)$$

- **Bambolê centrado em Y_{2_2}**

No sentido horário temos que:

$$\omega = \frac{5\pi}{3\Delta t_2} + \frac{2\pi n}{\Delta t_2} \approx \boxed{(8.49 + 10.2n)rad/s} \quad (23)$$

No sentido anti-horário:

$$\omega = \frac{\pi}{3\Delta t_2} + \frac{2\pi n}{\Delta t_2} \approx \boxed{(1.70 + 10.2n)rad/s} \quad (24)$$

2.4 Conclusão

Os possíveis valores da velocidade angular ω , da posição da lente l e da sua distância focal f são:

$\omega = (11.6 + 13.9n)rad/s,$	$l = 1.13m,$	$f = 0.619m$	(Caso 1 - Centro X_{2_1} - Sentido horário)
$\omega = (2.32 + 13.9n)rad/s,$	$l = 1.13m,$	$f = 0.619m$	(Caso 1 - Centro X_{2_1} - Sentido anti-horário)
$\omega = (2.81 + 8.42n)rad/s,$	$l = 1.13m,$	$f = 0.619m$	(Caso 1 - Centro X_{2_2} - Sentido horário)
$\omega = (5.61 + 8.42n)rad/s,$	$l = 1.13m,$	$f = 0.619m$	(Caso 1 - Centro X_{2_2} - Sentido anti-horário)
$\omega = (12.7 + 38.0n)rad/s,$	$l = 2.00m,$	$f = 1.00m$	(Caso 2 - Centro Y_{2_1} - Sentido horário)
$\omega = (25.3 + 38.0n)rad/s,$	$l = 2.00m,$	$f = 1.00m$	(Caso 2 - Centro Y_{2_1} - Sentido anti-horário)
$\omega = (8.49 + 10.2n)rad/s,$	$l = 2.00m,$	$f = 1.00m$	(Caso 2 - Centro Y_{2_2} - Sentido horário)
$\omega = (1.70 + 10.2n)rad/s,$	$l = 2.00m,$	$f = 1.00m$	(Caso 2 - Centro Y_{2_2} - Sentido anti-horário)

3. Parte II

3.1 Considerações

- Raios de luz que atravessam a lente pelo centro óptico não sofrem desvios.
- Raios paralelos que incidem numa lente convergente se encontram no mesmo ponto do plano focal da lente, o qual é perpendicular ao eixo óptico.
- Sabendo que todas as imagens (E_3, F_3, G_4 e H_4) são reais, a lente deve ser convergente, já que a formação de imagens reais é impossível em lentes divergentes.

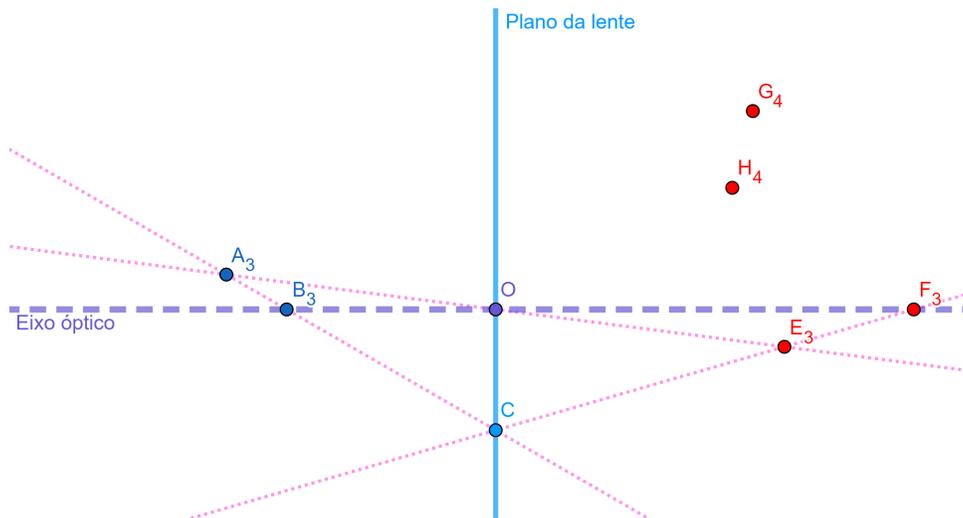
3.2 Plano da lente e Eixo óptico

Sabendo que E_3 é imagem de A_3 , e que F_3 é imagem de B_3 (todas imagens reais), podemos traçar o raio de luz que sai de A_3 e chega em E_3 sem sofrer desvio, e aquele que sai de B_3 e chega F_3 sem sofrer desvio, e para isso podemos simplesmente traçar a reta que liga estes pares. Esses raios de luz são interessantes pois não sofrem desvios, e logo devem passar pelo centro óptico da lente O , e portanto podemos determinar O pela intersecção desses dois raios.

Outro raio de luz útil seria aquele que passa pelas fontes pontuais A_3 e B_3 , que ao ser desviado pela lente

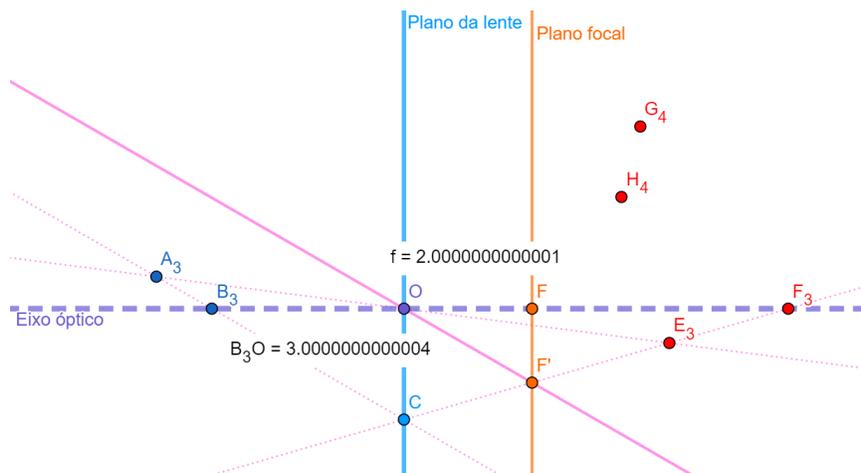
deverá passar pelas imagens E_3 e F_3 . Podemos determinar o ponto no qual este raio intersecta a lente traçando as retas A_3B_3 e E_3F_3 , o ponto de intersecção C entre elas é aquele no qual o raio sofreu o desvio, e portanto C pertence a lente.

Sabendo que O e C pertencem a lente, podemos determinar o plano da lente traçando a reta OC . Além disso podemos traçar o eixo óptico, que será perpendicular ao plano da lente e deve passar pelo centro óptico O , o qual por coincidência se justapõe ao raio de luz que sai de B_3 e chega em F_3 , o que faz com que B_3 e F_3 estejam alinhados no eixo óptico.



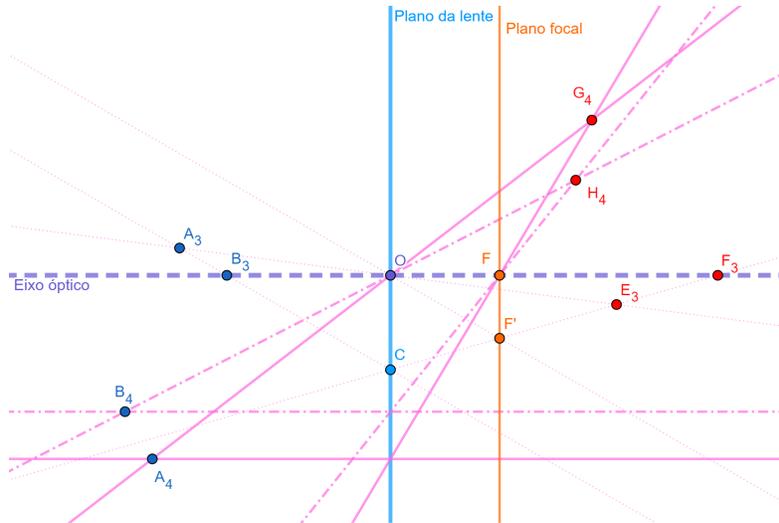
3.3 Plano focal

Para determinarmos o plano focal, podemos pensar num raio de luz paralelo ao raio que passa por A_3B_3 , e que passa pelo centro óptico. Pelas nossas considerações (3.1), este raio não será desviado pela lente, e seu ponto de cruzamento com a reta E_3F_3 (Raio A_3B_3 que foi desviado pela lente) será um ponto F' pertencente ao plano focal; e com este ponto podemos determinar o plano focal, já que esse é perpendicular ao eixo óptico e paralelo ao plano da lente. O plano focal intersecta o eixo óptico no foco F , cuja distância até O pode ser medida no Geogebra e caracteriza a distância focal $f = 2m$. Também podemos medir pelo Geogebra a distância entre B_3 e O , que caracteriza a posição da lente $l = 3m$.

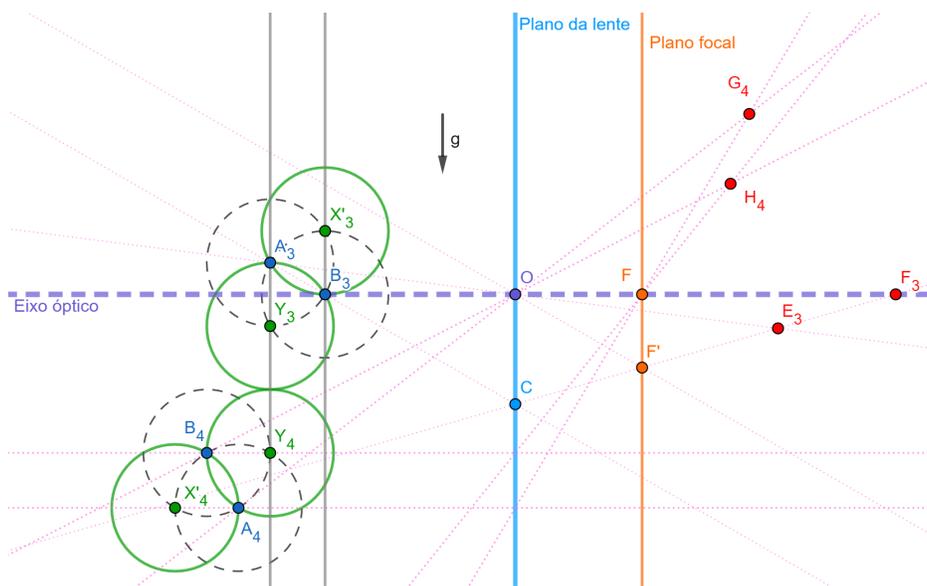


3.4 Posições do bambolê

Sabendo a posição do foco F , podemos determinar onde estavam as fontes de luz A_4 e B_4 que produziram as imagens G_4 e H_4 , respectivamente. Podemos utilizar do fato que raios que incidem na lente paralelos ao eixo óptico convergem ao foco F . Assim, traçamos as retas G_4F e H_4F para encontrar suas intersecções com o plano da lente, onde os raios que estavam paralelos sofreram o desvio para F , determinando assim os raios paralelos ao eixo óptico emitido pelas fontes A_4 e B_4 . Também podemos traçar os raios que chegam em G_4 e H_4 passando pelo centro óptico, e como estes não sofrem desvio podemos simplesmente traçar as retas G_4O e H_4O . A intersecção desses raios (O raio paralelo que foi desviado para G_4F com o raio G_4O ; e o raio paralelo que foi desviado para H_4F com o raio H_4O) caracterizam as fontes pontuais A_4 e B_4 . Isso se torna mais claro quando ilustrado:



Com isso podemos determinar as possíveis posições do bambolê em t_4 , assim como já podíamos ter determinado em t_3 , da mesma forma como fizemos na parte 1 (Seção 2), com alguns círculos auxiliares. E também podemos determinar a gravidade, já que esta é perpendicular ao eixo óptico e seu produto escalar com o vetor G_4H_4 é positivo, com sua direção e sentido representados na imagem abaixo, e logo podemos determinar a trajetória do bambolê.

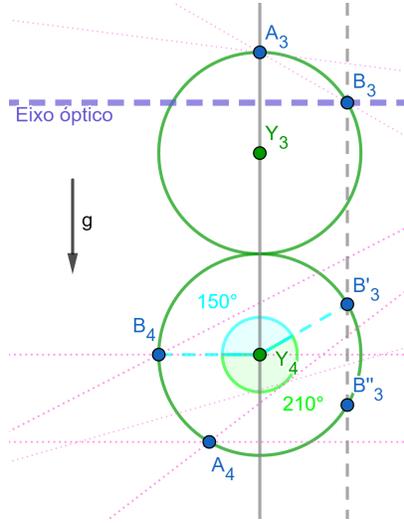


Porém, se torna claro na imagem que as possibilidades do bambolê estar em X'_3 ou X'_4 são inválidas, já que a trajetória de X'_3 é incompatível com as posições das fontes pontuais em t_4 : A_4 e B_4 ; e a posição X'_4 é incompatível com as posições das fontes pontuais em t_3 : A_3 e B_3 . Assim, as únicas posições plausíveis seriam Y_3 e Y_4 , sendo Y_3 a posição do centro do bambolê em t_3 , e Y_4 em t_4 .

Com isso, podemos determinar o deslocamento do bambolê Δs como na parte 1, medindo pelo Geogebra, ou verificando que as circunferências centradas em Y_3 e Y_4 são tangentes entre si, resultando em $\Delta s = 2m$. Logo, podemos determinar $\Delta t = t_4 - t_3$ pela equação (8) de queda livre.

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta s}{g}} \approx 0.639s \quad (25)$$

Para calcular o Ω ainda precisaremos considerar os casos de rotação horária e anti-horária novamente, e do mesmo modo como fizemos na parte 2, “projetando” B_3 na circunferência centrada em Y_4 , nesse caso a reta não é tangente, mas apenas o B'_3 é necessário para calcularmos a variação de ângulo. Podemos medir os ângulos no Geogebra (coincidentemente B_3 e X'_3 estão na mesma vertical):



- **Bambolê centrado em Y_4**

No sentido horário temos que:

$$\Omega = \frac{7\pi}{6\Delta t} + \frac{2\pi n}{\Delta t} \approx \boxed{(5.74 + 9.84n)rad/s} \quad (26)$$

No sentido anti-horário:

$$\Omega = \frac{5\pi}{6\Delta t} + \frac{2\pi n}{\Delta t} \approx \boxed{(4.10 + 9.84n)rad/s} \quad (27)$$

3.5 Conclusão

Os possíveis valores da velocidade angular ω , da posição da lente l e da sua distância focal f são:

$$\begin{aligned} \Omega &= (5.74 + 9.84n)rad/s, & l &= 3.00m, & f &= 2.00m & \text{(Centro } Y_4 \text{ - Sentido horário)} \\ \Omega &= (4.10 + 9.84n)rad/s, & l &= 3.00m, & f &= 2.00m & \text{(Centro } Y_4 \text{ - Sentido anti-horário)} \end{aligned}$$