PROBLEMA 1 - NÍVEL B - BRUNO MAKOTO T. DE LIMA

- DEMONSTRAÇÃO:

Primeiramente, sabemos pela física quântica que o momento angular é quantizado, ou seja, só pode assumir valores múltiplos inteiros de um valor específico. Assim, se provarmos que o momento angular L associado a um par de cargas, uma magnética e outra elétrica, é quantizado, isso significaria que as cargas elétricas (e magnéticas) são quantizadas, assim como queremos mostrar.

→ CÁLCULO DE $\vec{L}$:

O campo elétrico associado a uma carga elétrica é: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_e}{r^3} \cdot \vec{r}$, (carga elétrica)

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto onde queremos encontrar o campo elétrico

O campo magnético associado a um monopolo magnético é: $\overset{*1}{\vec{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r'^3} \vec{r}'$, (carga magnética)

pois é uma "lei de Coulomb" equivalente para as cargas magnéticas. $\vec{r}'$ é o vetor posição do ponto onde queremos encontrar o campo magnético

Agora, sabemos que a densidade volumétrica de momento eletromagnético ψ é:

$\vec{\psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S}^{\,*2}$, onde $\vec{S}$ é o vetor de Poynting e vale $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$, logo (Teorema de Poynting)

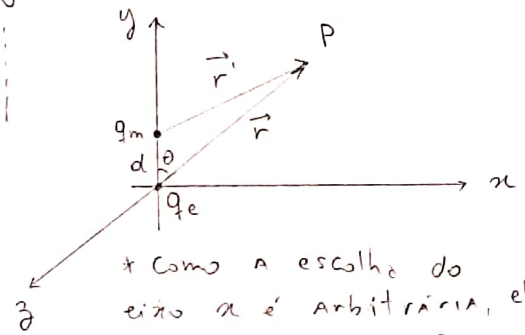
$\vec{\psi} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$

Assim, a densidade volumétrica de momento angular eletromagnético ℓ é:

$\overset{*3}{\vec{\ell}} = \vec{r} \times \vec{\psi}$.

* AS EXPRESSÕES COM O ASTERISCO SÃO DEDUZIDAS NO APÊNDICE

Desenhando um esquema da situação:



* Como a escolha do eixo x é arbitrária, ele está alinhado com P

Pela Lei dos Cossenos:

$r'^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta$

Somando vetores:

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$

Logo:
$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{d})}{(r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta)^{3/2}}$$

Como $\vec{d} = d\,\hat{y} = d(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$:

$$\vec{\psi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \cdot \frac{q_e q_m}{r^3(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{3/2}} \cdot \vec{r} \times (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\mu_0 d}{16\pi^2} \cdot \frac{q_e q_m \, r \operatorname{sen}\theta \, \hat{\varphi}}{r^3(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{3/2}}$$

onde $\hat{\varphi}$ é $\hat{r} \times \hat{\theta}$. Logo, a densidade de momento angular eletromagnético $\vec{\ell}$ é:

$$\vec{\ell} = \frac{\mu_0 d}{16\pi^2} \cdot \frac{(-1) \cdot \operatorname{sen}\theta \; \hat{\theta} \cdot q_e \cdot q_m}{r(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{3/2}}$$

Assim, o momento angular total sobre o espaço L é:

$$\vec{L} = \int_V \vec{\ell}\, dv$$

[Continua na próx pág]

PROBLEMA 1 - NÍVEL B - BRUNO MAKOTO TANABE DE LIMA

$$\vec{L} = -\frac{\mu_0 q_m q_e d}{16\pi^2} \int \frac{\text{sen}\,\theta \;\; \hat{\theta}}{r\,(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\, dv$$

· escrevendo $\hat{\theta}$ em coordenadas cartesianas:

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{z} - \text{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

· escrevendo o elemento de volume dv em coordenadas polares:

$$dv = r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

Vemos que a integral em φ vai sumir com as componentes x e y, logo:

$$\vec{L} = -\frac{\mu_0 q_m q_e d}{16\pi^2} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\,\theta \cdot \hat{\theta}}{r\,(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\, r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$\Rightarrow \vec{L} = +\frac{\mu_0 q_m q_e d}{8\pi}\hat{y} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{r\,\text{sen}^3\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\, d\theta\, dr$$. Fazendo $u = \cos\theta$, $du = -\text{sen}\,\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{\mu_0 q_m q_e d}{8\pi}\hat{y}\,(-1) \int_0^{\infty}\int_1^{-1} \frac{r\,(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\, du\, dr$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{d\,\mu_0 q_m q_e}{8\pi}\hat{y} \int_{-1}^{1} (1-u^2) \left(\int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2+d^2-2rd\,u)^{3/2}}\, dr \right) du$$

Pelo enunciado:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_m q_e d}{8\pi}\hat{y} \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, \frac{1}{d\,(1-u)}\, du = \hat{y}\frac{\mu_0 q_m q_e \cancel{d}}{8\pi \cancel{d}} \cdot \int_{-1}^{1} (1+u)\, du$$

Como $\int_a^b 1+x\, dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_a^b$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{\mu_0 q_m q_e \hat{y}}{8\pi} \cdot 2 = \boxed{\frac{\mu_0 q_m q_e}{4\pi}\hat{y}}$$

Como o resultado de $\vec{L}$ não depende de d e o momento angular, como já foi provado na física quântica, é quantizado, tanto a carga elétrica quanto a magnética teriam de ser quantizadas se existissem monopolos magnéticos.

Numericamente, nas unidades ampère metro *AO, o momento angular é múltiplo inteiro de $\frac{h}{4\pi}$, assim $L = n\frac{\hbar}{2}$, onde n é um número inteiro positivo. Logo:

$L = \frac{\mu_0 q_m q_e}{4\pi} = n\frac{\hbar}{2}$. Assim, se a carga elétrica assumisse múltiplos de e e a magnética múltiplos de b: $e = \frac{2\pi\hbar}{\mu_0 b}$ (Equação 1)

- DETECÇÃO DAS CARGAS MAGNÉTICAS:

Há uma analogia entre B e E que pode ser vista nas expressões da densidade de energia. A troca de $E \leftrightarrow B$, $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ e $q_m \leftrightarrow q_e$ são refletidas nas equações de Maxwell. Uma das variações é vista no $\nabla \cdot \vec{B}$. Como $\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}}$ (Lei de Gauss), onde $\rho_{e/m}$ é a densidade de carga elétrica/magnética. Temos:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m}$$

Agora, sabemos que $\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ (Lei de Ampère - Maxwell), onde $\vec{J}_{e/m}$ é a densidade de corrente elétrica/magnética.

Logo, a variação da Lei de Faraday - Lenz ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) é:

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$. O termo μ_0 junto de $\vec{J}_m$ serve para manter a unidade correta, enquanto o sinal negativo é devido à um análogo da Lei de Lenz para cargas magnéticas.

Vale lembrar que todas as unidades estão no S.I, sistema ampère-metro.

Vista a simetria entre as cargas magnéticas e elétricas, lembrando que a unidade da carga magnética é ampère-metro, e vendo a troca de sinais de $\nabla \times \vec{B}$ para $\nabla \times \vec{E}$, a força $\vec{F}$ em uma partícula de carga elétrica q, carga magnética b e velocidade $\vec{v}$ é:

$$\vec{F} = \underbrace{q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}_{\text{força de Lorentz}} + b(\vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E})$$

→ Note que, no segundo termo, há um fator $\mu_0 \varepsilon_0$ pois E possui a unidade de $v \cdot B$ *AD, logo temos que dividir $\vec{v} \times \vec{E}$ por um fator de velocidade ao quadrado, que é a função de $\mu_0 \varepsilon_0$, que é igual a $\frac{1}{c^2}$.

Com essas cinco equações, todo o eletromagnetismo com a hipótese da existência de monopolos magnéticos pode ser descrito.

AGORA, ESCREVENDO A EQUAÇÃO DA ONDA ELETROMAGNÉTICA:

[PRÓX. PAG]

PROBLEMA 1 - GRUPO B - BRUNO MAKOTO TANABE DE LIMA

A DEFINIÇÃO DO LAPLACIANO OU OPERADOR DE LAPLACE DE UM VETOR $\vec{A}$ É

$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A})$. Logo, calculando o laplaciano de $\vec{E}$:

$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$. Utilizando as equações descritas antes (Maxwell com cargas mag.)

$$\nabla\times\left(-\mu_0\vec{J}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \nabla\left(\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} \Leftrightarrow -\mu_0\nabla\times\vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_e - \nabla^2\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\mu_0\nabla\times\vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_e - \nabla^2\vec{E}$$

logo $$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_e + \mu_0\nabla\times\vec{J}_m + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}_e} \quad (Eq. 2)$$

Calculando o laplaciano de $\vec{B}$:

$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}$. Utilizando as equações de Maxwell com cargas magnéticas

$$\nabla\times\left(\mu_0\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla(\mu_0\rho_m) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\nabla\times\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})$$

$$\Leftrightarrow \mu_0\nabla\times\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\vec{J}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \mu_0\nabla\rho_m - \nabla^2\vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0\nabla\rho_m - \mu_0\nabla\times\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}_m} \quad (Eq. 3)$$

Análise Qualitativa:

PARA COMPARARMOS A INFLUÊNCIA DOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS NA EQUAÇÃO DA ONDA, PODEMOS FAZER UMA COMPARAÇÃO DE SEUS CAMPOS. Estou usando "$\square$" para COMPARAR A MAGNITUDE DOS CAMPOS.

· Como na equação da onda que encontramos as comparações são feitas entre E e cB (deixando todos os termos com a mesma unidade), o correto não é comparar E e B, e sim, E e cB. Logo:

$E \,\square\, cB \Leftrightarrow \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,\square\, \frac{\mu_0 c\, b}{4\pi r^2} \Leftrightarrow \frac{e}{\varepsilon_0} \,\square\, \mu_0 c b$. Utilizando a Equação 1:

$$\frac{e}{\varepsilon_0} \,\square\, \mu_0 c\cdot\frac{2\pi\hbar}{\mu_0 e} \Leftrightarrow \boxed{e^2 \,\square\, \varepsilon_0 c h}$$

· Numericamente, $\frac{\varepsilon_0 c h}{e^2} \approx 70$. Assim, na hipótese da existência de cargas magnéticas, elas influenciariam muito a equação da onda eletromagnética, praticamente dominando sua propagação. Tal variação poderia portanto ser observada experimentalmente, na forma de uma diferença de fase, p.ex.

· Além disso, pelo meio ser dispersivo, a própria dispersão da onda poderia ser utilizada para medir variações causadas pela carga magnética.

· Vale lembrar que, nas (Eq 2) e (Eq 3), os termos à direita (gradiente da densidade de carga, rotacionais da densidade de corrente e variações da densidade de corrente) são as fontes produtoras da onda.

Forma de detectá-las:

- Por Pressão de Radiação:

· No apêndice *2 vimos o Teorema de Poynting, onde podíamos indentificar o vetor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ como o fluxo de energia de um onda eletromagnética (vetor de Poynting), isso se não existirem monopolos magnéticos. Em materiais, a forma do vetor de Poynting é $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ *4, onde H é o campo auxiliar de B.

· Considerando monopolos magnéticos, chegamos num $\vec{S}'$ para o fluxo de energia de uma onda, que iremos calcular

· Agora, para medirmos tais variações, podemos utilizar o conceito da pressão de radiação ϕ. Lembrando que a energia de um fóton é $E = pc$ (↳ momento), temos:

$$\phi = \frac{F}{A} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{A} = \frac{dE}{c\, A \cdot dt} = \frac{S}{c}$$

(F → força; A ↳ área; $\frac{dE}{A\,dt}$: fluxo de energia S)

* isso vale para corpos negros somente

Assim, podemos calcular os vetores de Poynting $\vec{S}$ *4 (somente cargas elétricas) e $\vec{S}'$ *5 (cargas magnéticas também existem) e medir a pressão de radiação que atinge um corpo negro. Caso ela não seja condizente com $\vec{S}$, desprezando eventuais erros sistemáticos não teóricos, a única explicação seria a existência de monopolos magnéticos. Portanto:

$\phi_{esperado} = \frac{S}{c}$, onde $S = E \cdot H \cdot \operatorname{sen}\theta$ (apêndice 4)

caso $\phi_{medido} \neq \phi_{esperado}$: [monopolos magnéticos existem]

$\phi_{\text{monopolos mag. + carga elétrica}} = \frac{S'}{c}$, onde $S' = \mu_0 D_m H_e \operatorname{sen}\theta'$ (apêndice 5)

Note que, para medir tal pressão, basta calcular a força sofrida por um objeto de área A, e dividir $\frac{F}{A}$. Para calcular a força em um objeto de massa m, basta calcular sua aceleração γ e multiplicar pela massa (sendo m = cte e F a única força atuando no corpo)

PROBLEMA I (B), BRUNO MAKOTO TANABE DE LIMA

- POR ESPIRA SUPERCONDUTORA:

- Caso um monopolo magnético passe por uma espira de indutância L e resistência nula, surgirá uma corrente I nela. Provarei que isto só ocorre caso um monopolo passe, não acontecendo o mesmo para dipolos ou n-polos.
- Pelo análogo à Lei de Faraday para monopolos magnéticos:

$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Pelo teorema de Stokes, integrando sobre a área:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \int_S \vec{J}_m \, d\vec{a} - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

- Se não houverem fontes, a f.e.m. induzida $\mathcal{E}$ na espira é:

$$\mathcal{E} = \oint \underbrace{\vec{f}}_{\text{força por unidade de carga}} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \, d\vec{l}$$

- Como $I_m = \int_S \vec{J}_m \, d\vec{a}$ e $\underbrace{\phi_m}_{\text{fluxo magnético}} = \int \vec{B} \, d\vec{a}$:

$\mathcal{E} = -\mu_0 I_m - \frac{d\phi}{dt}$, onde I_m é a corrente magnética que passa pela superfície S

- Se a espira possuir indutância L:

$$\mathcal{E} = -L \cdot \frac{dI_e}{dt}$$

Logo $dI_e = \frac{\mu_0}{L} I_m \, dt + \frac{1}{L} d\phi_m$

integrando: $I_e = \frac{\mu_0}{L} \Delta q_m + \frac{\Delta \phi_m}{L}$

Onde Δq_m é a carga magnética que passa na espira, q_m, e $\Delta\phi_m$ é a variação do fluxo magnético. Se o monopolo for trazido de $-\infty$ até $+\infty$, $\Delta\phi_m = 0$, pois $\phi_m(-\infty) = \phi_m(\infty) = 0$. Logo:

$$\boxed{I_e = \frac{\mu_0}{L} q_m}$$

[continua na próx pág]

AGORA, CASO um dipolo ou (2n)-polo pasasse pela espira, não haveria corrente. Pois, sendo um dipolo uma ASSOCIAÇÃO de dois monopolos magnéticos de cargas magnéticas opostas, duas correntes de sentidos opostos e módulos iguais seriam produzidas, deixando uma corrente resultante nula. Caso um (2n+1)-polo pasasse pela espira, como ele é equivalente a um (2n)-polo e um monopolo, haveria corrente. Comprovando assim que existem monopolos magnéticos

APÊNDICE : DEDUÇÃO das fórmulas que não estão nos syllabus

$$\boxed{*1: \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m \vec{r}}{r^3}}$$: campo de um monopolo magnético

o resultado é obtido a partir da analogia entre campos elétricos e magnéticos, que pode ser visto na expressão da densidade de energia elétrica (u_e) e magnética (u_m):

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \longleftrightarrow u_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

As mudanças estão relacionadas à troca de $\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$, $B \leftrightarrow E$ e $q_e \leftrightarrow q_m$

Assim, uma das leis de Maxwell fica (comparando com a lei de Gauss):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$

Usando o teorema da divergência e integrando sobre o volume, sabendo que há uma simetria esférica do campo de uma carga:

$$\int_V \nabla \vec{B}\, dv = \int_V \mu_0 \rho_m\, dv \Leftrightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 q_m$$. Devido à simetria:

$$\Rightarrow B \cdot 4\pi r^2 = \mu_0 \cdot q_m \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m \cdot \vec{r}}{r^3}$$

APÊNDICE: dedução das fórmulas que não estão nos syllabus.

$\boxed{*2: \vec{\psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S}}$

· força eletromagnética em cargas em um volume $\mathcal{V}$:

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho \, d\tau \quad \text{(Lei de Lorentz)}.$$

· força por unidade de volume:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

· como $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ e $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Equações de Maxwell):

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

Agora $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \times \vec{B} \right) + \left(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

Lei de Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E}$$

Logo: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$

Como $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}$, assim como trocando $\vec{E}$ por $\vec{B}$:

Temos, pois $(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} = 0$:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right] - \frac{1}{2} \nabla \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Usando o tensor de Maxwell, $\overleftrightarrow{T}$, cujo componente na direção j do divergente é definido por:

$$(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T})_{\underset{j}{}}^{\text{componente } j} = \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]$$

Assim: $\vec{f} = \nabla \overleftrightarrow{T} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$, onde $\vec{S}$ é, pelo Teorema de Poynting, $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$

Logo, a força total nas cargas é, pelo teorema da divergência:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \, d\vec{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \vec{S} \, d\tau$$

O momento mecânico $\vec{p}_{mec}$ é, pela 2ª Lei de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} = - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \vec{S} \, d\tau + \oint_S \overleftrightarrow{T} \, d\vec{a}$$

[PRÓX PÁG]

PROBLEMA 1 - GRUPO B - BRUNO MAKOTO

Teorema de Poynting: onde $\frac{dW}{dt}$ é o trabalho realizado pelas forças eletromagnéticas ... $\frac{}{dt}$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint_S (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}$$

O primeiro termo é a taxa de perda da energia armazenada no campo pelo volume $\mathcal{V}$, já o segundo termo é a taxa de energia liberada através da área S. Devido à semelhança entre $\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt}$ e $\frac{dW}{dt}$, podemos dizer que o momento eletromagnético armazenado no campo é

$\vec{P}_{em} = \mu_0\varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{S}\, d\tau$, logo a densidade volumétrica de momento eletromagnético $\vec{\psi}$ é: $\boxed{\vec{\psi} = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \vec{S}}$

densidade volumétrica de momento angular $\vec{\ell}$ é: $\boxed{\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{\psi}}$

*3: densidade volumétrica de momento eletromagnético é $\vec{\psi} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S}$,
Como a densidade volumétrica de momento angular $(\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p})$: $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{\psi}$.
pela definição de momento angular

*AD Análise Dimensional

→ Sistema ampère-metro:

Comparando a Lei de Biot Savard com o campo de um monopolo:

$$\vec{B}_{BS} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{e} \quad \vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\hat{r}$$

A Dimensão de q_m fica igual à de [corrente] × [distância], logo:

$$[q_m] = [I]\,[l] = \underbrace{A}_{\text{Ampère}}\cdot\underbrace{m}_{\text{metro}}$$

→ E e cB possuem mesma unidade:

pela expressão da força de Lorentz: $\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$
logo $\vec{E}$ deve ter a mesma unidade de $\vec{v}\times\vec{B}$, que equivale a dizer que E e cB possuem mesma unidade

PROBLEMA 1 (B) - BRUNO MAKOTO TANABE DE LIMA

*4: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Analisando as densidades de cargas e correntes livres:

$$\vec{F}_f \cdot d\vec{l} = \underbrace{q_f (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}_{\text{Força de Lorentz}} \vec{v}\, dt = q_f \vec{E} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

como $q_f = \rho_f d\nu$ e $\vec{J}_f = \rho_f \vec{v}$, a taxa de trabalho exercido pelas cargas livres em um volume ν é:

$$\frac{dW}{dt} = \int_\nu (\vec{E} \cdot \vec{J}_f) . d\nu$$

↳ índice f = livre

Por definição:

$$\vec{J}_f = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ então } \vec{E} \cdot \vec{J}_f = \vec{E} . (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Como $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \times \vec{B})$

e $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Faraday)

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla . (\vec{E} \times \vec{H}) \text{ . logo}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_f = - \vec{H} . \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} . \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla . (\vec{E} \times \vec{H})$$

logo:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_\nu \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\nu - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) . d\vec{a}$$

Como o formato é análogo ao do Teorema de Poynting, temos que $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$

*5 : $\vec{S}' = \mu_0 \vec{D}_m \times \vec{H}_e$

somente cargas elétricas: $\vec{P}_e$ e $\vec{M}_e$ (densidades de polarização e magnetização)

cargas elétricas + magnéticas: $\vec{P}_m$ e $\vec{M}_m$

densidades de correntes e cargas livres: $\tilde{\rho}_e$, $\tilde{\rho}_m$, $\tilde{\vec{J}}_e$, $\tilde{\vec{J}}_m$

densidades de correntes e cargas totais:

$$\rho_e = \tilde{\rho}_e - \nabla \cdot \vec{P}_e \qquad \vec{J}_e = \tilde{\vec{J}}_e + \frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}_e \text{ (definição)}$$

$$\rho_m = \tilde{\rho}_m - \nabla \cdot \vec{M}_m \qquad \vec{J}_m = \tilde{\vec{J}}_m + \frac{\partial \vec{M}_m}{\partial t} - c^2 \nabla \times \vec{P}_m$$

Campos auxiliares (DEFINIÇÕES e analogias): para manter dimensão

$$\vec{D}_e = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e, \quad \vec{H}_e = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}_e, \quad \vec{D}_m = \frac{\vec{E}}{\mu_0} - c^2 \vec{P}_m, \quad \vec{H}_m = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{M}_m$$

Sabendo das equações de Maxwell com monopolos:

$$\nabla \cdot \vec{D}_e = \tilde{\rho}_e, \quad \nabla \cdot \vec{H}_m = \tilde{\rho}_m, \quad \nabla \times \vec{D}_m = -\frac{\partial \vec{H}_m}{\partial t} - \tilde{\vec{J}}_m, \quad \nabla \times \vec{H}_e = \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} + \tilde{\vec{J}}_e$$

Já vimos a força $\vec{F}$ em um monopolo magnético (PÁGINA 3), logo:

$$\vec{F}_e = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \mu_0 q_e(\vec{D}_m + \vec{v} \times \vec{H}_m)$$

$$\vec{F}_m = q_m\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right) = \mu_0 q_m(\vec{H}_e - \vec{v} \times \vec{D}_e)$$

Agora, a densidade volumétrica de força nas cargas livres é:

$$\vec{f}_e = \tilde{\rho}_e \vec{E} + \tilde{\vec{J}}_e \times \vec{B} \quad \text{ou} \quad \mu_0(\tilde{\rho}_e \vec{D}_m + \tilde{\vec{J}}_e \times \vec{H}_m)$$

$$\vec{f}_m = \tilde{\rho}_m \vec{B} - \frac{\tilde{\vec{J}}_m}{c^2} \times \vec{E} \quad \text{ou} \quad \mu_0(\tilde{\rho}_m \vec{H}_e - \tilde{\vec{J}}_m \times \vec{D}_e)$$

Como potência = força · velocidade, a densidade da variação temporal do trabalho $\left(\frac{d\tilde{W}}{dt}\right)$ em densidades de carga e corrente livres é:

$$\frac{d\tilde{W}_e}{dt} = \vec{f}_e \cdot \vec{v}_e = \tilde{\vec{J}}_e \cdot \vec{E} \quad \text{ou} \quad \mu_0 \tilde{\vec{J}}_e \cdot \vec{D}_m$$

[prox. PÁGINA]

Assim:

$$\frac{d\tilde{w}_e}{dt} = \tilde{\vec{J}}_e \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}_e - \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_e) + \vec{H}_e \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t}$$

* nessa última passagem, utilizei que $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{w}_e}{dt} = -\nabla (\vec{E} \times \vec{H}_e) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} - \vec{H}_e \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_m \cdot \vec{H}_e$$

Em termos da corrente livre $\tilde{\vec{J}}_e$ podemos escrever:

$$\frac{d\tilde{w}_e}{dt} = \mu_0 \cdot \tilde{\vec{J}}_e \cdot \vec{D}_m = \mu_0 \vec{D}_m \left(\nabla \times \vec{H}_e - \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} \right)$$

$$= -\mu_0 \nabla \cdot (\vec{D}_m \times \vec{H}_e) + \mu_0 \vec{H}_e \cdot \nabla \times \vec{D}_m - \mu_0 \vec{D}_m \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t}$$

$$= -\mu_0 \nabla \cdot (\vec{D}_m \times \vec{H}_e) - \mu_0 \vec{D}_m \cdot \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} - \mu_0 \vec{H}_e \cdot \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial t} - \mu_0 \tilde{\vec{J}}_m \cdot \vec{H}_e$$

Analogamente, para as densidades de corrente magnética livres:

$$\frac{d\tilde{w}_m}{dt} = \vec{f}_m \cdot \vec{v}_m = \tilde{\vec{J}}_m \cdot \vec{B} \quad \text{ou} \quad \mu_0 \tilde{\vec{J}}_m \cdot \vec{H}_e$$

Juntando todos os resultados até agora:

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = \frac{d\tilde{w}_e}{dt} + \frac{d\tilde{w}_m}{dt} = -\mu_0 \nabla (\vec{D}_m \times \vec{H}_e) - \mu_0 \vec{D}_m \cdot \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} - \mu_0 \vec{H}_e \cdot \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial t}$$

Vemos que o formato é o mesmo de quando só há cargas elétricas! Logo, por analogia:

$$\boxed{\vec{S} = \mu_0 \vec{D}_m \times \vec{H}_e}$$

teorema de Poynting