Problema 3 (B)

Bruno Makoto Tanabe de Lima

agosto de 2020

Fatos a serem utilizados

(1) a imagem de uma linha reta também é uma linha reta, pois um raio de luz que passa pelo objeto (uma reta), ao ser redirecionado pela lente, deve conter todos os pontos pertencentes à imagem.
(2) raios paralelos incidentes numa lente convergem em um plano normal ao eixo da lente: o plano focal
(3) um raio de luz que passa pelo vértice de uma lente sai inalterado
(4) um raio de luz incidente que entra paralelo ao eixo óptico vai para o foco.

Assim, irei resolver as duas partes da questão com imagens que foram printadas do GeoGebra, e irei também disponibilizar o link de acesso às minhas figuras.

Estou utilizando a notação: XY, $\overrightarrow{XY}$, $segXY$ e $\vec{XY}$ como, respectivamente: reta, semirreta e segmento que passa por X e Y, e vetor que vai de X até Y.

1 Luz giratória - Parte 1

1.1 Considerações iniciais

O eixo óptico da lente é a reta C_2D_2, logo a gravidade está no eixo vertical da figura. Além disso, para o produto escalar entre $\vec{g}$ e $C_2\vec{D}_2$ ser positivo, a gravidade aponta para baixo.

Agora, há três fatores, cada um com dois casos, que influenciam nas possíveis respostas: o sentido em que o bambolê gira, se o centro do bambolê está acima ou abaixo do eixo óptico e a posição inicial do bambolê. Logo, há 8 respostas possíveis para ω e 4 para distância focal/posição da lente, como irei mostrar.

O primeiro fator a ser considerado é a posição inicial do bambolê. A abertura $\alpha = \frac{\pi}{3}$ com relação ao centro nos dá duas alternativas para o centro da circunferência: à direita ou à esquerda de $B_1\vec{A}_1$. Para qualquer uma delas, o triângulo ($A_1 - B_1 -$ centro do bambolê) é equilátero, pois o ângulo com relação ao centro é de 60° e há uma simetria por reflexão em torno da reta (centro − ponto médio entre A_1B_1), implicando que o triângulo seja isósceles. A figura 1 mostra as duas opções de circunferência: Λ_3 e Λ_4, cujos centros são O_3 e O_4, respectivamente. Aqui, os índices 3 e 4 não correspondem à instantes de tempo, e sim, à posição inicial do bambolê.

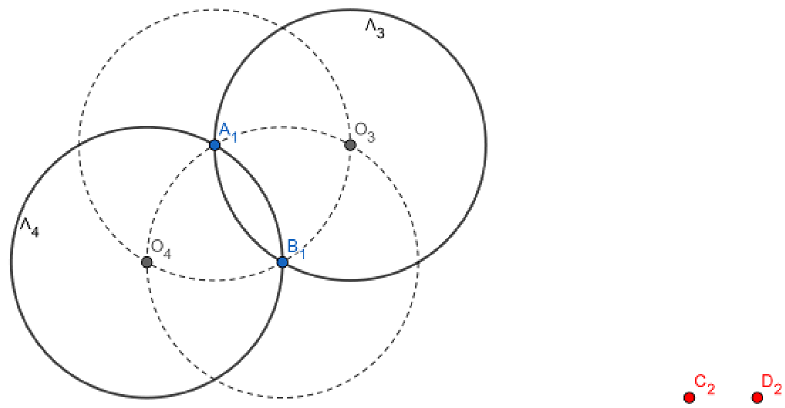

Figure 1: Posição do bambolê

Agora, para cada uma dessas posições, existem duas configurações possíveis para os pontos A_{n-2} e B_{n-2} (índice n-m: circunferência n (3 ou 4) no instante m) possuírem como imagem os pontos C_2 e D_2, por enquanto não necessariamente nessa ordem. Sabemos pelo fato (1) que os pontos A_{n-2} e B_{n-2} devem estar no eixo óptico. Assim, o centro do bambolê pode estar acima ou abaixo desse eixo.

O último fator a ser considerado é o sentido de rotação do bambolê, já que ele pode girar em qualquer sentido para atingir uma configuração específica (A_{n-2} e B_{n-2} , com centro acima ou abaixo do eixo óptico). Isso ficará mais claro nos casos individuais.

Por fim, após determinarmos a posição do bambolê, basta aplicarmos a equação da conjugação de Gauss para encontrar a distância focal da lente.

Agora, podemos separar em cada um dos 4 casos possíveis para a posição do bambolê:

1.2 Caso 1: Λ_3 com centro acima do eixo óptico

"https://www.geogebra.org/geometry/bg3cfqrs" (casos 1 e 2)

Para determinar a posição do centro O_{3-2} sabendo que ele está acima do eixo óptico e que os pontos A_{3-2} e B_{3-2} estão sobre este, podemos traçar uma reta perpendicular ao eixo óptico que passe por O_3, sendo P o ponto de intersecção. O centro O_{3-2} estará uma distância O_3M acima de P, onde M é o ponto médio entre A_1 e B_1. Através da funcão "compasso", podemos fazer tal construção e chegar nos pontos A_{3-2} e B_{3-2}. Além disso, através da função "interseção entre 2 objetos" vemos que o centro O_{3-2} está sobre a posição da circunferência Λ_3 no início. Esses passos podem ser observados na figura 2.

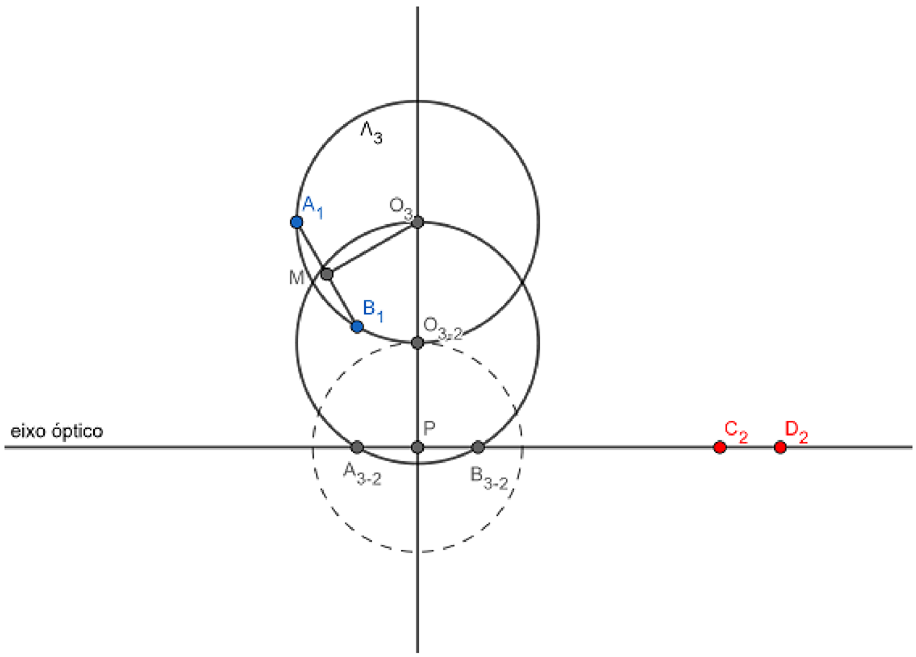

Figure 2: Caso 1

Agora, basta aplicarmos equações de óptica geométrica para encontrar a distância focal e posição da lente.

Primeiramente, como as imagens são reais, o foco da lente está necessariamente à direita de B_{3-2} e à esquerda de C_2. Agora, sabemos que a imagem de um objeto se aproxima da lente quando o objeto se afasta a distâncias maiores que o foco (se $p \to \infty$, $p' \to f_+$ e se $p \to f_+$, $p' \to \infty$). Assim, C_2 é a imagem de A_{3-2} e D_2 é a imagem de B_{3-2}. Sendo p_1, p_2, p_1', p_2' e f_1 a posição do ponto A_{3-2}, B_{3-2}, C_2, D_2 e o foco da lente, respectivamente, podemos aplicar a equação da conjugação de Gauss, obtendo:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'}$$

Que podemos rearranjar para:

$$p_1 = \frac{2(\Delta y' - L) \pm \sqrt{4(L - \Delta y')^2 - 4(k-1)(L\Delta y' - L^2)}}{2(k-1)}$$

onde $\Delta y' = p_2' - p_1' = 0,5m$, $\Delta y = p_1 - p_2 = 1m$, $L = p_1 + p_2' = 3,5m$ e

$k = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = 0,5$ onde utilizei a função "Distância, Comprimento" do Geogebra para chegar nos valores numéricos

Realizando os devidos cálculos, obtemos dois valores para p_1, $9,87$ ou $2,13m$. A primeira opção corresponde ao caso da imagem virtual, pois a lente estaria à direita de C_2, contradizendo nossos limites para garantir uma imagem real. Logo nossa resposta é $p_1 = 2,13m$. Assim, podemos calcular o foco da lente f_1 encontrando p_2' e p_2 a partir de p_1 e substituindo na equação da conjugação de Gauss. Obtemos assim $f_1 = 0,619m$. Além disso, a lente está $p_2' = 1,37m$ à esquerda do ponto D_2, perpendicular ao eixo óptico.

Já vimos que o centro do bambolê no instante 2, O_{3-2}, está sobre a posição inicial do bambolê. Assim, a circunferência desceu uma distância igual a $x = r = 1m$ durante um intervalo de tempo $\Delta t_1 = t_2 - t_1$, que é dado por (lembrando que a velocidade inicial é nula)

$$x = \frac{g}{2}\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta t_1 = 0,452s$$

Agora, há duas opções para a velocidade angular do caso 1, ω_{1H} e ω_{1AH}, que correspondem ao sentido horário e anti-horário de rotação, respectivamente. Separando os dois casos:

(HORÁRIO): o ponto A_1 foi da posição horizontal à esquerda do centro para a posição A_{3-2}, percorrendo um ângulo (pois$\angle A_{3-2}O_{3-2}P = \frac{\pi}{6}$) $\Delta\theta_{1H} = \frac{5}{3}\pi + 2\pi n$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ num tempo Δt_1, logo:

$$\omega_{1H} = \frac{\Delta\theta_{1H}}{\Delta t_1} = (11,6 + 13,9n)rad/s$$

(ANTI-HORÁRIO): o ponto A_1 foi da posição horizontal à esquerda do centro para a posição A_{3-2}, percorrendo um ângulo $\Delta\theta_{1AH} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ num tempo Δt_1, logo:

$$\omega_{1AH} = \frac{\Delta\theta_{1AH}}{\Delta t_1} = (2,32 + 13,9n)rad/s$$

1.3 Caso 2: Λ_3 com centro abaixo do eixo óptico

"https://www.geogebra.org/geometry/bg3cfqrs" (casos 1 e 2)

Através da função "reflexão com relação a um ponto" podemos refletir o ponto O_{3-2} com relação à P e obter o centro O'_{3-2}, que é a posição do centro do bambolê. Repare que agora o ponto A'_{3-2} está à direita do ponto B'_{3-2}, independente do sentido de rotação. Veja a figura 3.

Os cálculos para encontrar o foco são exatamente os mesmos, logo $f_2 = f_1 = 0,62m$. E a lente continua a uma distância de $1,37m$ à esquerda de D_2. Agora, durante o intervalo de tempo $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ o bambolê desceu uma distância $x = r + 2rsen\frac{\pi}{3} = 2,73m$, logo:

$$x = \frac{g}{2}\Delta t_2^2 \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0,746s$$

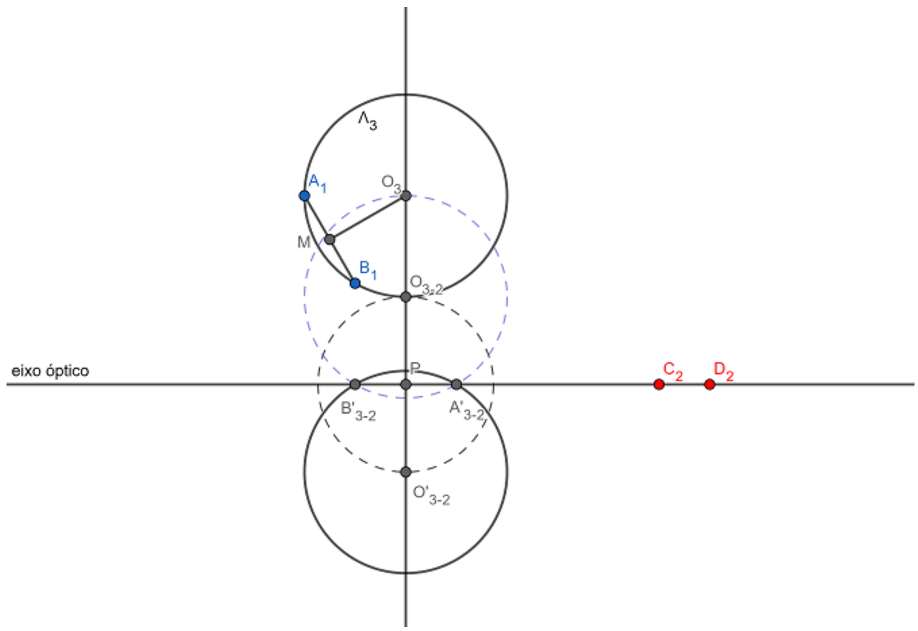

Figure 3: Caso 2

Agora, as possíveis velocidades angulares são separadas por ω_{2H} e ω_{2AH}, para sentido horário ou anti-horário de rotação:
(HORÁRIO): A_1 foi da esquerda do centro do bambolê para o ponto A'_{3-2}, percorrendo um $\Delta\theta_{2H} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ durante um tempo Δt_2, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{2H} = \frac{\Delta\theta_{2H}}{\Delta t_2} = (2,81 + 8,42) rad/s$$

(ANTI-HORÁRIO): A_2 foi da esquerda do centro do bambolê para o ponto A'_{3-2}, percorrendo um $\Delta\theta_{2AH} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$ durante um tempo Δt_2, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{2AH} = \frac{\Delta\theta_{2H}}{\Delta t_2} = (5,61 + 8,42) rad/s$$

1.4 Caso 3: Λ_4 com centro acima do eixo óptico

"https://www.geogebra.org/geometry/vh9pgxtf" (caso 3)
Realizando o mesmo método de construção utilizado nos dois primeiros casos podemos encontrar os pontos A_{4-2} e B_{4-2}, que são vistos na figura 4, onde troquei P por F e utilizei pontos análogos em comparação à figura 2.

Novamente, como as imagens são reais, o foco da lente está necessariamente à direita de A_{4-2} e à esquerda de C_2. Agora, sabemos que a imagem de um objeto se aproxima da lente quando o objeto se afasta a distâncias maiores que o foco (se $p \to \infty$, $p' \to f_+$ e se $p \to f_+$, $p' \to \infty$). Assim, C_2 é a imagem

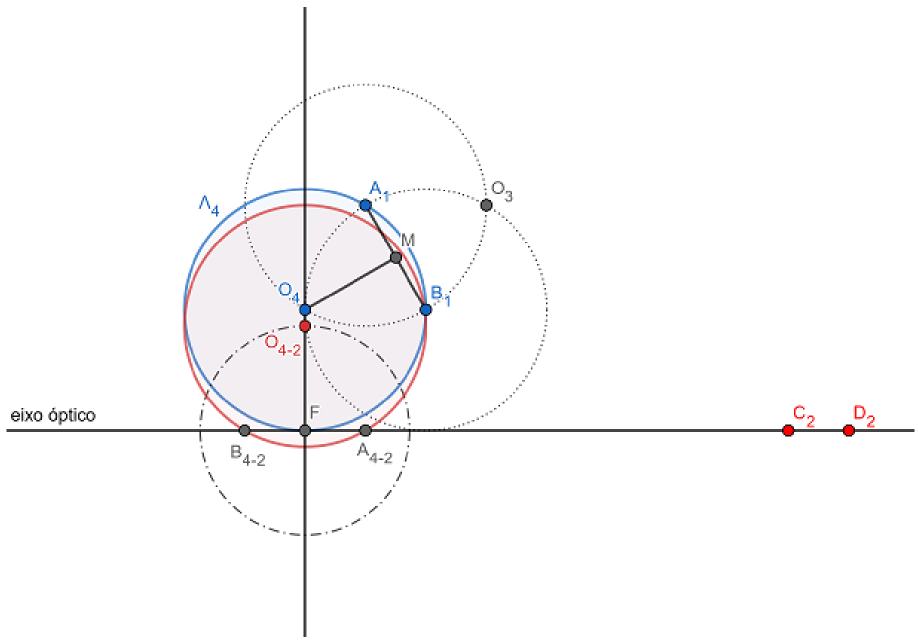

Figure 4: Caso 3

de B_{4-2} e D_2 é a imagem de A_{4-2}. Sendo P_1, P_2, P_1', P_2' e f_3 a posição do ponto B_{4-2}, A_{4-2}, C_2, D_2 e o foco da lente, respectivamente, podemos aplicar a equação da conjugação de Gauss, obtendo:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_1'} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_2'}$$

Que podemos rearranjar para:

$$P_1 = \frac{2(\Delta y' - c) \pm \sqrt{4(c - \Delta y')^2 - 4(k-1)(c\Delta y' - c^2)}}{2(k-1)}$$

onde $\Delta Y' = P_2' - P_1' = 0,5m$, $\Delta Y = P_1 - P_2 = 1m$, $c = P_1 + P_2' = 5m$ e $k = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = 0,5$ onde utilizei a função "Distância, Comprimento" do Geogebra para chegar nos valores numéricos.

Realizando as contas, obtemos $P_1 = 15m$ ou $3m$. A segunda opção é a correspondente à imagem real, que é nossa resposta. Isso fica claro ao analisarmos as dimensões dos termos - se a lente estivesse $15m$ à direita de B_{4-2}, estaríamos violando a regra de que a lente deve estar à esquerda de C_2. Assim, a lente está a uma distância de $c - P_1 = 2m$ à esquerda de D_2, perpendicular ao eixo óptico e possui distância focal $f_3 = 1m$ - calculada encontrando P_2' a partir de c, substituindo na expressão de $\Delta Y'$ para encontrarmos P_1' e enfim jogando tais valores na equação da conjugação de Guass.

Agora, o intervalo de tempo $\Delta t_3 = t_2 - t_1$ que o bambolê levou para percorrer $x = r - rsen\frac{\pi}{3} = 0,134m$ é:

$$x = \frac{g}{2}\Delta t_3^2 \Rightarrow \Delta t_3 = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0,165s$$

O bambolê pode ter girado no sentido horário ou anti-horário, com um ω_{3H} ou ω_{3AH}, respectivamente. Logo:
(HORÁRIO): B_1 estava à direita do centro do bambolê e foi para o ponto B_{4-2}, percorrendo um ângulo $\Delta\theta_{3H} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ durante um intervalo de tempo Δt_3, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{3H} = \frac{\Delta\theta_{3H}}{\Delta t_3} = (12,7 + 38,0n)rad/s$$

(ANTI-HORÁRIO): B_1 estava à direita do centro do bambolê e foi para o ponto B_{4-2}, percorrendo um ângulo $\Delta\theta_{3AH} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$ durante um intervalo de tempo Δt_3, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{3AH} = \frac{\Delta\theta_{3AH}}{\Delta t_3} = (25,3 + 38,0n)rad/s$$

1.5 Caso 4: Λ_4 com centro abaixo do eixo óptico

"https://www.geogebra.org/geometry/vn2qcchg" (caso 4)
Para encontrar a posição do centro O'_{4-2} do bambolê nesse caso, basta utilizarmos a função "reflexão em relação a um ponto" no ponto O_{4-2} com relação ao ponto F. Além disso, A_1 e B_1 vão para os pontos A'_{4-2} e B'_{4-2}, respectivamente, onde este último fica à direitea de A'_{4-2}, independentemente do sentido de rotação do bambolê. A figura 5 mostra isso.

Pelo mesmo argumento dos casos anteriores, C_2 e D_2 são as imagens de A_{4-2} e B_{4-2}. Assim, a aplicação da lei da conjugação de Gauss nos retornará valores idênticos para a distância focal f_4 do terceiro caso: $f_4 = f_3 = 1,36m$. A posição da lente se mantém $2m$ à esquerda de D_2.

Agora, o intervalo de tempo $\Delta t_4 = t_2 - t_1$ que o bambolê levou para percorrer $x = r + rsen\frac{\pi}{3} = 1,87m$ é:

$$x = \frac{g}{2}\Delta t4^2 \Rightarrow \Delta t_4 = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0,617s$$

O bambolê pode ter girado no sentido horário ou anti-horário, com um ω_{4H} ou ω_{4AH}, respectivamente. Logo:
(HORÁRIO): B_1 estava à direita do centro do bambolê e foi para o ponto B'_{4-2}, percorrendo um ângulo $\Delta\theta_{4H} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ durante um intervalo de tempo Δt_4, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{4H} = \frac{\Delta\theta_{4H}}{\Delta t_4} = (8,49 + 10,2n)rad/s$$

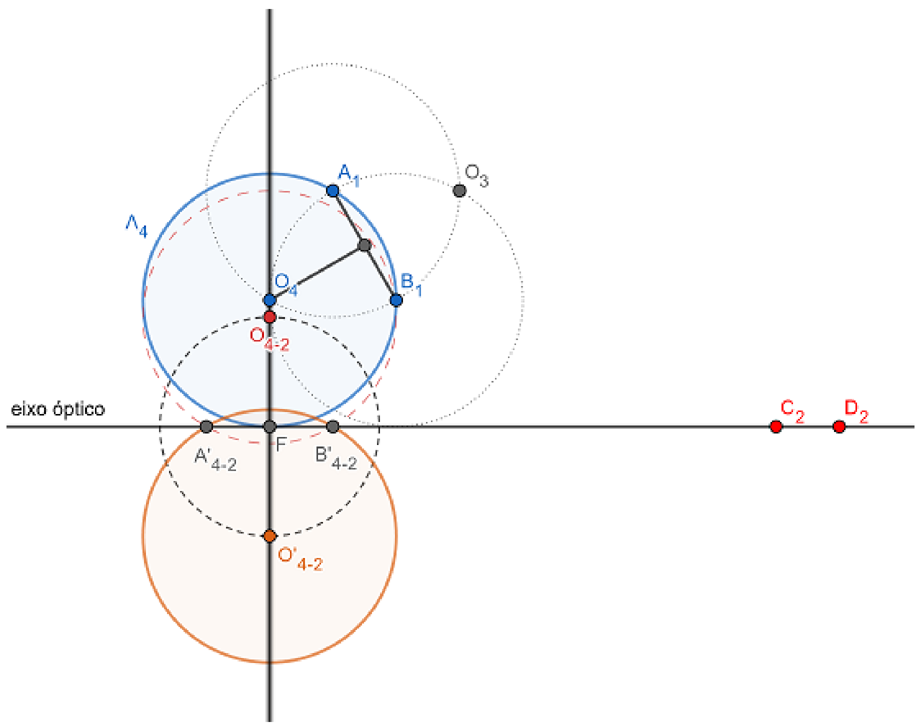

Figure 5: Caso 4

(ANTI-HORÁRIO): B_1 estava à direita do centro do bambolê e foi para o ponto B'_{4-2}, percorrendo um ângulo $\Delta\theta_{4AH} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ durante um intervalo de tempo Δt_4, onde $n = 0, 1, 2, ...$ Logo:

$$\omega_{4AH} = \frac{\Delta\theta_{4AH}}{\Delta t_4} = (1,70 + 10,2n) rad/s$$

2 Juntando tudo

: *Para todos os ω, adotei $n = 0, 1, 2, ...$

2.0.1 Circunferência Λ_3:

distância focal $0,619m$ com lente $1,37m$ à esquerda de D_2, perpendicular ao eixo óptico
Caso 1: centro de Λ_3 acima do eixo óptico:
$\omega_{1H} = (11,6 + 13,9n) rad/s$ no sentido horário
$\omega_{1AH} = (2,32 + 13,9n) rad/s$ no sentido anti-horário
Caso 2: centro de Λ_3 abaixo do eixo óptico:
$\omega_{2H} = (2,81 + 8,42) rad/s$ no sentido horário
$\omega_{2AH} = (5,61 + 8,42) rad/s$ no sentido anti-horário

2.0.2 Circunferência Λ_4:

distância focal $1m$ com lente $2m$ à esquerda de D_2 perpendicular ao eixo óptico
Caso 3: centro de Λ_4 acima do eixo óptico:
$\omega_{3H} = (12,7 + 38) rad/s$ no sentido horário
$\omega_{3AH} = (25,3 + 38) rad/s$ no sentido anti-horário
Caso 4: centro de Λ_4 abaixo do eixo óptico:
$\omega_{4H} = (8,49 + 10,2) rad/s$ no sentido horário
$\omega_{4AH} = (1,7 + 10,2) rad/s$ no sentido anti-horário

3 Luz giratória - Parte 2

o desenho final do GeoGebra é: https://www.geogebra.org/geometry/hjt4peg5

3.1 Posição da lente

Pelo fato (1), a intersecção das retas A_3B_3 e E_3F_3 deve ser um ponto da lente. Chamei tal ponto de M

Como a imagem de A_3 é E_3 e a imagem de B_3 é F_3, existem dois raios de luz que passam pela lente ser terem seus sentidos alterados que coincidem com as retas A_3E_3 e B_3F_3. Assim, a intersecção dessas retas é o centro óptico da lente, que chamei de ponto P.

Como temos dois pontos da lente, podemos traçá-la. O desenho está na figura 1

Agora, o eixo óptico estará perpendicular à lente, passando pelo centro óptico P. Além d=isso, utlizando a função do GeoGebra "ângulo", podemos ver que o ângulo entre a lente e a reta B_3F_3 é reto. Assim, a reta B_3F_3 é o próprio eixo óptico da lente.

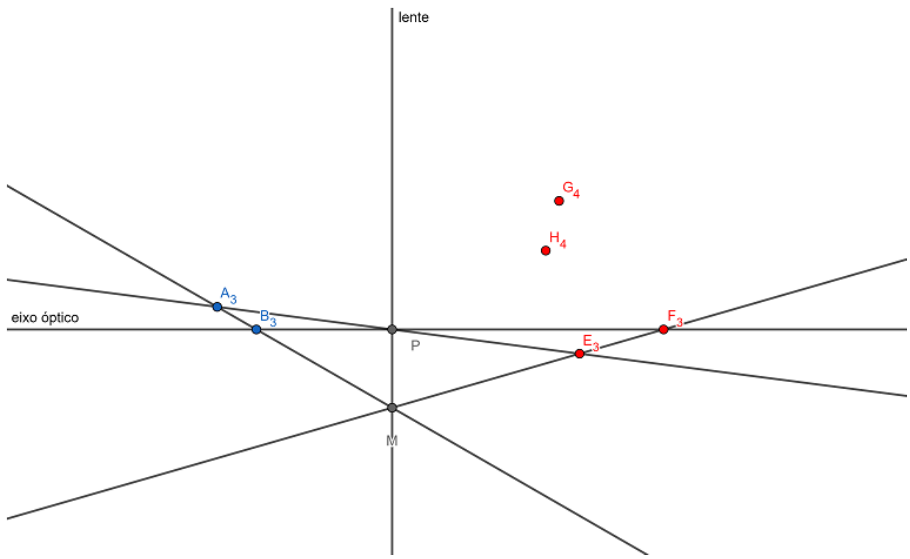

Figure 6: Posição da lente

3.2 Distância focal

Se observarmos um raio de luz j que passa pelo centro óptico da lente P e é paralelo à reta A_3B_3, ele passará inalterado pela lente, intersectando a reta E_3F_3 no ponto F. Pelo fato (2), tal ponto pertence ao plano focal, que pode ser traçado pegando a reta paralela ao eixo óptico no ponto F. Chamei tal ponto de intersecção de Q. Como raios de luz paralelos entre si que incidem paralalelos ao eixo óptico são direcionados ao foco da lente, a distância entre esta e o plano focal é justamente a distância focal. Assim, o comprimento do segmento de reta $segPQ$ pode se calculado através da função do GeoGebra "disância, comprimento", nos retornando $2m$. Assim, a distância focal da lente é de dois metros. A figura 2 mostra os passos descritos.

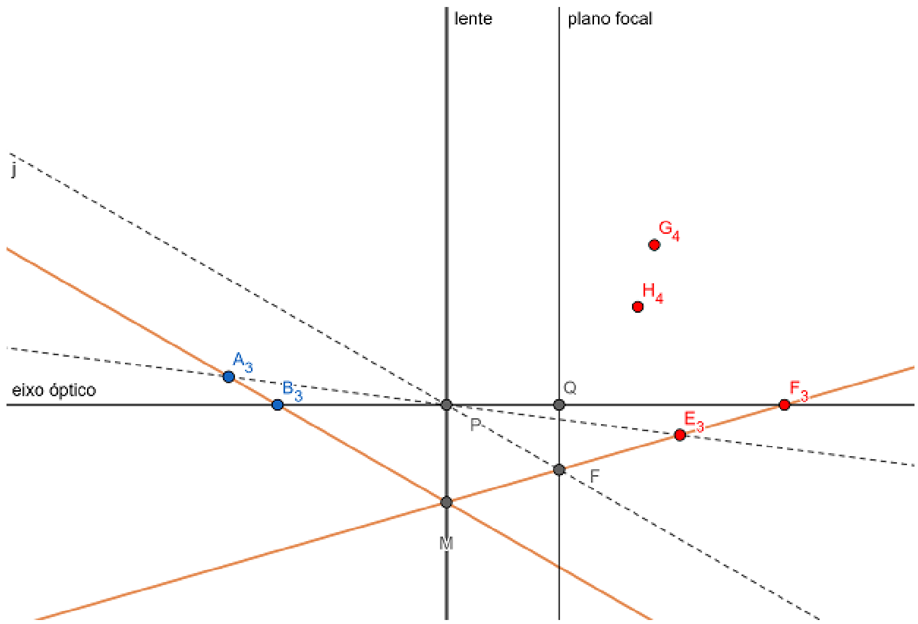

Figure 7: Distância focal

3.3 Encontrando Ω

Sabemos que raios de luz que incidem paralelos ao eixo óptico da lente se convergem no foco. De tal forma, se observarmos os raios de luz que coincidem com as retas G_4Q e H_4Q, eles saem paralelos ao eixo óptico quando passam pela lente (reversibilidade dos raios de luz) e contém os pontos A_4 e B_4. Chamei os raios de luz que saem paralelos ao eixo óptico de p - ponto A_4 e q - ponto B_4.

Agora, obeservando os raios de luz que passam pelo centro óptico da lente e coincidem com as retas G_4P e H_4P, eles saem inalterados e contém os pontos A_4 e B_4, respectivamente.

Assim, podemos pegar as intersecções entre as retas p e G_4Q, que nos dá o ponto A_4, e entre as retas q e H_4Q, que nos dá o ponto B_4. Temos portanto os pontos A_4 e B_4 então já podemos calcular Ω. A figura 3 mostra os passos até aqui.

Como foi visto da parte um do problema, há inicialmente duas posições possíveis para o bambolê, cabe a nós determinar qual é a correta. Traçando as circunferências possíveis para o bambolê no tempo t_3, obtemos Γ_1 e Γ_2, de centros C_1 e C_2, respectivamente. Analogamente para o tempo t_4, obtemos as circunferências Γ_3 e Γ_4, cujos centros são os pontos C_3 e C_4, respectivamente. Pelo enunciado, a gravidade aponta no sentido do vetor $\vec{PM}$, pois é paralela à lente e seu produto escalar com $\vec{A_3B_3}$ é positivo. Assim, a reta que liga os centros do bambolê nos tempos t_3 e t_4 deve ser paralela à lente, pois esta é paralela à gravidade. Calculando o ângulo entre o eixo e todas as combinações

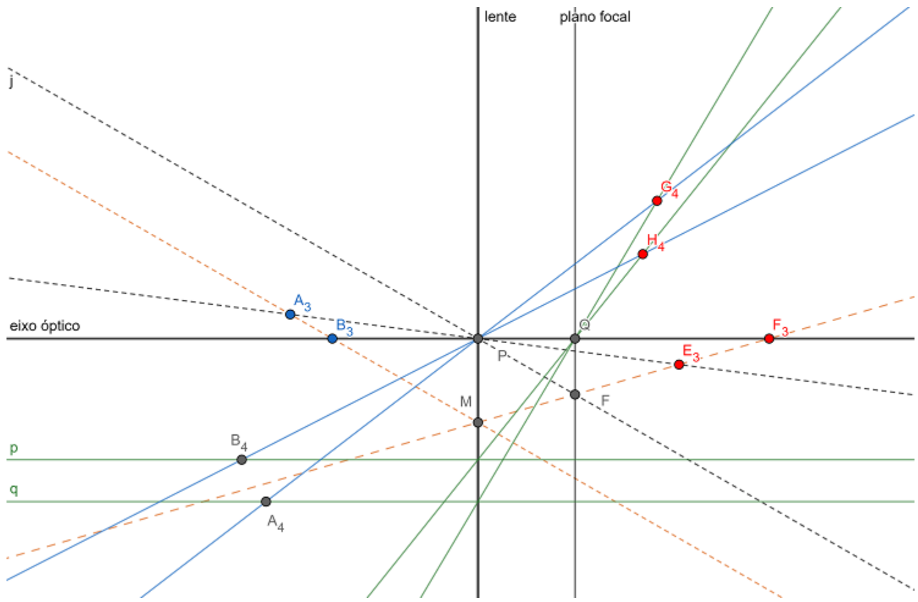

Figure 8: Ω

de retas que ligam dois centros de circunferência, através da funcão "ângulo" no GeoGebra, temos que a única solução corresponde às circunferências Γ_2 e Γ_3. Logo estas são as posições do bambolê nos instantes t_3 e t_4. A figura 4 mostra isso.

Agora, através da função do GeoGebra "interseção de dois objetos", temos que as circunferências Γ_2 e Γ_3 são tangentes entre si. Logo, o bambolê percorreu uma distância $x = 2m$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_4 - t_3$. Como o bambolê estava inicialmente parado, esse intervalo é dado por:

$$x = \frac{g}{2}\Delta t^2 \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0,639s$$

Separando o sentido da rotação do bambolê entre horário e anti-horário:

(Horário): O ângulo percorrido pelo ponto A é $\Delta\theta_H = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ pois tal ponto estava acima do centro do bambolê no início e no ponto A_4 no tempo t_4. Logo a velocidade angular Ω_H do bambolê é:

$$\Omega_H = \frac{\Delta\theta_h}{\Delta t} = \frac{7\pi}{6\Delta t} + \frac{2\pi n}{\Delta t} = (5,74 + 9,84n)rad/s$$

onde $n = 0, 1, 2, ...$

(Anti-horário): O ângulo percorrido pelo ponto A é $\Delta\theta_{AH} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ pois tal ponto estava acima do centro do bambolê no início, e estava à esquerda deste no fim. Logo a velocidade angular Ω_{AH} do bambolê é:

$$\Omega_{AH} = \frac{\Delta\theta_h}{\Delta t} = \frac{5\pi}{6\Delta t} + \frac{2\pi n}{\Delta t} = (4,10 + 9,84n)rad/s$$

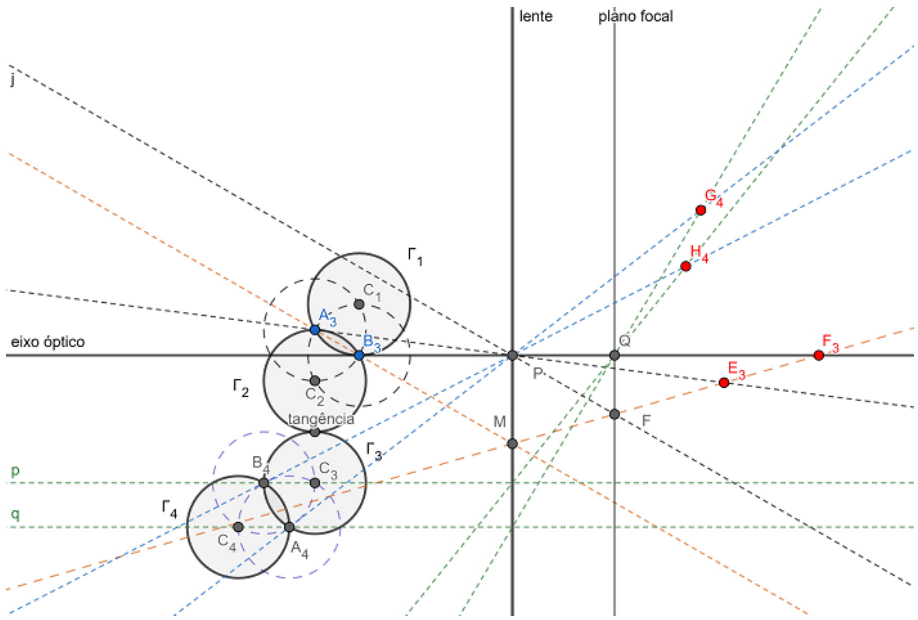

Figure 9: Ω

onde $n = 0, 1, 2, ...$

Assim, a velocidade angular do bambolê pode ser Ω_H no sentido horário ou Ω_{AH} no sentido anti-horário.