Problema 1 (C)

Ian Seo Takose

07/08/2020

1 Demonstração

1.1 Momento Angular

Primeiramente, devido à forte semelhança entre as equações da Magnetostática e da Eletrostática, caso existam cargas magnéticas, as equações "magnéticas" podem ser deduzidas ao trocarmos q_e (carga elétrica) por q_m (carga magnética), ϵ_0^{-1} por μ_0 e $\vec{E}$ por $\vec{B}$. Assim, se algum lugar do universo houver uma carga magnética q_m e uma elétrica q_e, os campos elétrico e magnético Podem ser escritos como (ver vetores na figura):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r'}}{r'^3} \qquad (1) \qquad \vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

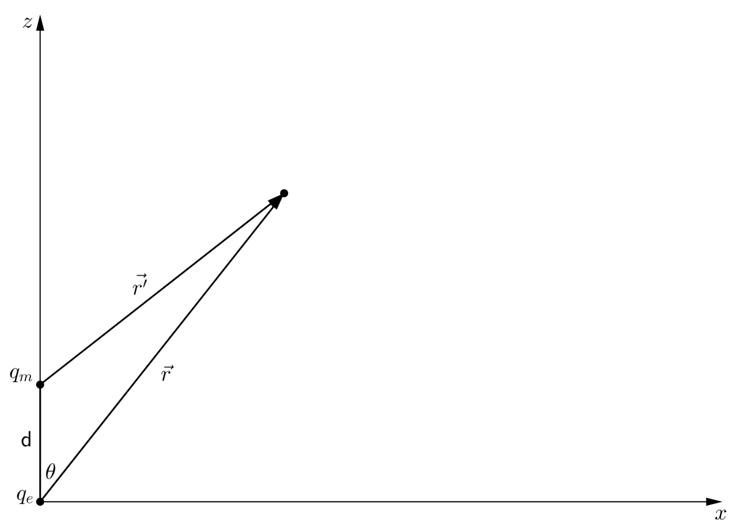

Figure 1: Par monopolo elétrico-monopolo magnético

Por uma simples Lei dos Cossenos, temos que r' é dado por:

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2drcos\theta$$

Nota-se também que $\vec{r'} = \vec{r} - d\hat{z}$

Agora, vamos utilizar o fato de que a densidade de momento linear $\vec{\wp}$ armazenado em um campo eletromagnético é dado por:

$$\vec{\wp} = \epsilon_0(\vec{E} \times \vec{B}), \tag{2}$$

a qual será demonstrada no final.
A partir disso, podemos escrever o momento angular por unidade de volume ℓ como:

$$\ell = \vec{r} \times \vec{\wp} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2} \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \hat{z})}{r^3(r^2 + d^2 - 2drcos\theta)^{3/2}}$$

Pela propriedade do produto vetorial, segue:

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \hat{z}) = \vec{r}(\vec{r} \cdot \hat{z}) - r^2\hat{z} = r^2(\hat{r}cos\theta - \hat{z})$$

Para encontrar o momento angular total $\vec{L}$, devemos integrar em todo o espaço:

$$\ell = \frac{d\vec{L}}{dV} \Rightarrow \vec{L} = \iiint_V \vec{\ell} dV$$

Substituindo em coordenadas esféricas, temos que $dV = r^2 sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (perceba que, por simetria, ao fazermos isso as componentes x e y se cancelam, de forma que só nos interessará $|\hat{r_z}| = cos\theta$):

$$\vec{L} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\hat{z} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{r^2(cos^2\theta - 1)}{r^3(r^2 + d^2 - 2drcos\theta)^{3/2}} r^2 sen\theta\, d\phi\, d\theta\, dr$$

Substituindo $u = cos\theta \Rightarrow du = -sen\theta\, d\theta$ para simplificar as contas, temos:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2} 2\pi\hat{z} \int_{u=-1}^{1} \int_{r=0}^{\infty} \frac{r(1 - u^2)}{(r^2 + d^2 - 2rdu)^{3/2}}\, du\, dr$$

Já que u e r são independentes entre si, podemos fazer a integral em r ignorando o termo $(1 - u^2)$. Pela fórmula dada no exercício, a integral fica:

$$\int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + d^2 - 2rdu)^{3/2}}\, dr = \frac{1}{d(1 - u)}$$

Por sorte, a integral em u será facilitada:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{8\pi}\hat{z} \int_{-1}^{1} \frac{(1 - u^2)}{(1 - u)}\, du = \frac{\mu_0 q_e q_m}{8\pi}\hat{z} \int_{-1}^{1} (1 + u) du = \frac{\mu_0 q_e q_m}{8\pi}\hat{z} \left(u + \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

Finalmente,

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\hat{z}$$

1.2 Argumento Quântico

A mecânica quântica nos diz que o momento angular deve ser quantizado em unidades de $\hbar$. Portanto,

$$L = n\hbar \Rightarrow \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi} = n\hbar \Rightarrow q_e = n\frac{4\pi\hbar}{\mu_0 q_m} = ne,$$

onde $e = \frac{4\pi\hbar}{\mu_0 q_m}$ seria a carga fundamental (do elétron), o que condiz com a quantização já conhecida. Conclui-se portanto, que a simples existência de uma carga magnética em algum lugar do universo resultaria na quantização da carga elétrica.

2 Detecção de cargas magnéticas

2.1 A influência dos monopolos magnéticos

Para escrever as equações de Maxwell, deve-se perceber que todas equações escritas para a eletricidade e para o magnetismo podem ser facilmente intercambiadas e também, as que relacionam as duas juntas, são inalteradas caso façamos as trocas $\epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0^{-1}$, $q_e \leftrightarrow q_m$ (consequentemente $\rho_e \leftrightarrow \rho_m$ e $\vec{J_e} \leftrightarrow \vec{J_m}$)[i], $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$[ii]. Então, as equações de Maxwell devem seguir esses critérios para garantir a coerência matemática. Com um pouco de análise dimensional, chegamos nas equações:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times (-\vec{E}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}_m$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}_e$$

Pelo mesmo argumento a força de Lorentz pode ser escrita como:

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m \left(\vec{B} - \vec{v} \times \frac{\vec{E}}{c^2}\right)$$

Para resolver as novas equações de Maxwell, vamos utilizar a propriedade:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Assim,

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 J_m\right) = \nabla\left(\frac{\rho_e}{\epsilon_0}\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

[i] ρ e J são a densidade volumétrica de carga e a densidade de corrente, respectivamente

[ii] Note que, ao fazermos isso as unidades não são respeitadas, portanto teríamos de multiplicar algumas constantes para ajeitar as unidades

Vamos abrir o lado esquerdo da equação:

$$\nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu_0 J_m\right)=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}-\mu_0\nabla\times\vec{J}_m=-\frac{\partial\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}_e\right)}{\partial t}-\mu_0\nabla\times\vec{J}_m.$$

Finalmente,

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\left(\frac{\partial\vec{J}_e}{\partial t}+\nabla\times\vec{J}_m\right)+\frac{\nabla\rho_e}{\epsilon_0} \tag{3}$$

Agora, para $\vec{B}$:

$$\nabla\times\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}_e\right)=\nabla\left(\rho_m\mu_0\right)-\nabla^2\vec{B}$$

O lado esquerdo fica:

$$\nabla\times\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}_e\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial(\nabla\times\vec{E})}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\vec{J}_e=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu_0 J_m\right)}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\vec{J}_e$$

Portanto,

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\mu_0\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t}-\nabla\times\vec{J}_e+\nabla\rho_m\right) \tag{4}$$

2.2 Análise qualitativa

Podemos perceber que o lado esquerdo das equações (3) e (4) representam funções de ondas e o lado direito suas fontes. Comparando com os resultados que seriam encontrados nas equações de Maxwell originais (equivalente a dizer que $J_m=\rho_m=0$), percebemos que há mais maneiras de produzirmos ondas eletromagnéticas (por exemplo, agora, um gradiente de cargas magnéticas também produz ondas), o que poderia nos dar algumas pistas da existência de tais partículas: se em um local com $J_e=\rho_e=0$ estiver originando ondas, a única explicação para esse fenômeno seriam monopolos magnéticos. Também podemos comparar a diferença que a presença dessas cargas faria nos campos elétricos e magnéticos. Como base, vamos comparar o valor de E e $B\cdot c$ (que são iguais em uma onda eletromagnética). Seja k a razão $\frac{B\cdot c}{E}$:

$$k=\frac{\mu_0 q_{m_0} c}{4\pi r^2}\cdot\frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{e}=\frac{\mu_0\,\epsilon_0\,c\,q_{m_0}}{e}=\frac{q_{m_0}}{e\,c}$$

Vamos utilizar $q_{m_0}=\frac{4\pi\hbar}{\mu_0 e}$. Por fim,

$$k=\frac{2\times 6,62607004\cdot 10^{-34}}{1,25663706\cdot 10^{-6}\times 2,99792458\cdot 10^{8}\times(1,60217662\cdot 10^{-19})^2}\sim 100$$

Essa influência no campo magnético poderia causar comportamentos estranhos nas ondas eletromagnéticas (como uma diferença de fases entre B e E), o que poderia ser detectado e aproveitado na busca de cargas magnéticas.

2.3 Como encontrá-las?

Desvio de resultados

Um jeito simples de detectá-las seria realizar experimentos em que nós já sabemos os resultados (e.g. elétron acelerando e a respectiva onde eletromagnética produzida) e, caso os resultados desviarem demais do esperado (e claro, precisaríamos recriar o experimento e rever a teoria o máximo possível para livrarmos a hipótese de um erro sistemático ou de premissa), ou estiver mais próximo dos resultados em que a existência de tais partículas, garantiria sua existência.

Espira supercondutora

Com uma espira supercondutora (resistência 0), pode-se detectar monopolos magnéticos caso tenhamos a sorte de que este passe pela espira. Haverá uma corrente elétrica I_e na espira se, e somente se, uma carga magnética tiver passado por ela. Vamos demonstrar isso:
Considere a Lei de Faraday adaptada para monopolos magnéticos, $\nabla \times (-\vec{E}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 J_m$ que, integrando na superfície do anel, nos dá[iii]:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\mu_0 \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Pela definição de $\vec{J}_m$ e ϕ_m (fluxo magnético), as integrais são facilmente calculadas como sendo I_m e $\frac{d\phi_m}{dt}$, respectivamente (note que I_m é a corrente magnética que atravessa a área em que integramos). Se L for a indutância da nossa espira, podemos escrever outra equação para $\mathcal{E}$ como sendo:

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI_e}{dt} = -\left(\mu_0 I_m + \frac{d\phi_m}{dt}\right) \Rightarrow I_e = \frac{\mu_0}{L}\Delta q_{m_{in}} + \frac{1}{L}\Delta\phi_m$$

Podemos interpretar Δq_m como a carga magnética que passa pela nossa superfície e $\Delta\phi_m$ como a varição do fluxo magnético pela superfície. Já que a área considerada é o círculo delimitado pela espira, quando um carga magnética passa, Δq_m é simplesmente q_m e $\Delta\phi_m = 0$ (vem do $+\infty$ e vai para o $-\infty$, e $B_{(\pm\infty)} = 0 \Rightarrow \phi_{m_{(\pm\infty)}} = 0$). Assim, a corrente elétrica induzida devido à passagem da carga magnética é:

$$I_e = \frac{\mu_0}{L} q_m$$

Perceba que um dipolo magnético pode ser modelado como sendo duas cargas magnéticas, positiva e negativa, separadas por uma distância d (assim como

[iii] Aqui foi usado o Teorema de Stokes que diz que para um campo vetorial $\vec{E}_{(x;y;z)}$, vale a propriedade:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

onde $d\vec{s}$ é um elemento de área e $d\vec{l}$ de comprimento um dipolo elétrico), dessa forma, caso um dipolo magnético passe pela espira, $\Delta q_m = q_m + (-q_m) = 0$. Como no infinito o campo deve ser 0, a corrente total será nula também. Ainda, no caso geral de um "$2n$-polo" magnético ($n \in \mathbb{N}$) devemos ter $B_{(\pm\infty)} = 0$ e $\Delta q_m = nq_m + n(-q_m) = 0$, logo não haverá corrente "presa" no anel caso tenhamos um $2n$-polo. Note que no caso de um "$(2n+1)$-polo", Δq_m não será nulo, no entanto, isso não é um problema pois, na teoria atual onde não existem monopolos magnéticos, a existência de $(2n+1)$-polos magnéticos também é impossível então, de certa forma, estaríamos detectando cargas magnéticas também (só que seriam várias delas). Finalmente, fica provado que haverá uma corrente fluindo na espira se, e somente se, monopolos magnéticos existirem.

3 Apêndice

3.1 Equação (1)

Por uma das equações de Maxwell adaptada, sabemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$

Integrando no volume temos que[iv]:

$$\iint\limits_S \vec{B} \cdot \, d\vec{s} = \iiint\limits_V \mu_0 \rho_m \, dV$$

Para uma carga pontual q_m o lado direito da igualdade se resume a $\mu_0 q_m$. Além disso, por ser pontual, ela deve possuir simetria esférica, de forma que a integral da esquerda (que é igual ao fluxo do campo $\vec{B}$, por definição) fica simplesmente $B \cdot A$, onde A é a área superficial da esfera de raio r, sendo $\vec{r}$ o vetor que liga a partícula a um ponto do espaço (apontando para ele). Logo,

$$B \cdot 4\pi r^2 = \mu_0 q_m \Rightarrow B_{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2}.$$

Ainda pela simetria esférica, $\vec{B}$ deve ser puramente radial:

$$\vec{B}_{(r)} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

3.2 Equação (2)

Imagine uma carga q com velocidade $\vec{v}$ em um local com campo elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$. Pela força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

[iv]O Teorema de Stokes também nos diz que para um campo vetorial $\vec{B}_{(x;y;z)}$, vale a propriedade:

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV = \iint\limits_S \vec{B} \cdot \, d\vec{s},$$

Seja $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$ a força por unidade de volume, temos:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \tag{5}$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica e $\vec{J}$ a densidade de corrente. Pelas equações de Maxwell, $\rho = \epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})$ e $\vec{J} = \mu_0^{-1}\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Perceba que por propriedade de derivada temos:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mas a Lei de Faraday nos diz que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$. Logo, substituindo tudo isso em (2), chegamos em:

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] - \mu_0^{-1}[\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}).$$

Ainda, podemos usar outra propriedade de derivada:

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla(B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B},$$

E obviamente o mesmo vale para $\vec{E}$. Então,

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla(E^2) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}] - \mu_0^{-1}\left[\frac{1}{2}\nabla(B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}\right] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}).$$

Além de estar muito feio, não há nenhuma simetria. Para resolver isso, vamos somar $\mu_0^{-1}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B}$. Note que, pela Lei de Gauss para o magnetismo, ele vale 0, então não estaremos mudando o valor de $\vec{f}$. Portanto,

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}] + \mu_0^{-1}[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}] - \frac{1}{2}\nabla(\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1}B^2) - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}),$$

que continua feio, no entanto com uma boa simetria. Graças à ela, com um olhar cuidadoso nota-se que, com a introdução de um tensor (vetor generalizado) $T_{ij} \,|\, i, j \in \{x; y; z\}$ que satisfaz:

$$T_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \mu_0^{-1}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right),$$

esse tensor, em especial, é chamado de Tensor de Maxwell. O operador δ_{ij} é chamado de Delta de Kronecker e vale 1 quando $i = j$ e 0 caso contrário. Com ele, podemos tornar nossa equação muito mais agradável[v]:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})$$

Pela estrutura análoga ao Teorema de Poynting, podemos afirmar que o segundo termo é a densidade de força "armazenada" em um campo eletromagnético. Por fim,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{f} = \frac{d\vec{\wp}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\wp}}{dt} = \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{\wp} = \epsilon_0(\vec{E} \times \vec{B})$$

[v] O desenvolvimento rigoroso que esse tensor satisfaz isso não é o foco do exercício.