

# Campeonato de Física 2020

Vinicius Névoa

## Problema 3 - Grupo A - Solução Oficial

### Uma sacada genial

#### Item a

O primeiro passo para responder ao primeiro item é descobrir qual é a velocidade linear e a velocidade angular que a raquete imparte a bolinha. Vamos chamar de  $\Delta P$  o momento linear transmitido, e  $\Delta L = R\Delta P$  o momento angular transmitido. Note que esse momento angular é gerado pelo torque da força de atrito, cujo braço é sempre  $R$ , e por isso vale a equação anterior.

Como a bolinha não desliza em relação à raquete:

$$V = V_0 + \omega_0 R$$

Podemos facilmente relacionar  $V_0$  e  $\omega_0$  às quantidades acima:

$$V_0 = \frac{\Delta P}{m}$$

$$\omega_0 = \frac{\Delta L}{I} = \frac{\Delta P}{\frac{2}{5}mR}$$

Assim a equação que garante o não deslizamento se torna:

$$V = \frac{\Delta P}{m} + \frac{\Delta P}{\frac{2}{5}m} \Rightarrow \frac{\Delta P}{m} = \frac{2}{7}V$$

O que nos retorna:

$$\boxed{V_0 = \frac{2}{7}V, \omega_0 = \frac{5V}{7R}}$$

Assumindo que o saque vai passar da rede (senão o problema seria trivial), vamos estudar a colisão da bolinha com o chão. Uma vez que, por hipótese, a energia do movimento vertical é conservada, a variação de momento linear na vertical é  $\Delta P_y = 2mV_y$ . A velocidade vertical da bolinha logo antes atingir o chão é, por conservação de energia:

$$V_y = \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gH}$$

Portanto:

$$\Delta P_y = 2m\sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gH}$$

Vamos analisar a física por trás disso: essa variação de quantidade de movimento na vertical se deve ao impulso da força normal. Como existe um atrito cinético entre o chão e a bola durante a colisão, além dessa força normal existe uma força de atrito dada por  $F = \mu N$ , que imparte um impulso horizontal. Como essas forças se relacionam por uma multiplicação por uma constante, seus impulsos também são assim relacionados:

$$\Delta P_x = \mu \Delta P_y$$

$$\Delta P_x = 2m\mu\sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gH}$$

Mais ainda, esse impulso horizontal ocorre no sentido contrário da velocidade horizontal da bolinha (lembre-se que a velocidade angular produz uma velocidade no ponto de contato que está no *mesmo* sentido da velocidade horizontal). Assim, para que a velocidade horizontal mude de sentido, queremos que:

$$mV_0 \cos \theta - \Delta P_x < 0$$

$$V_0 \cos \theta < 2\mu\sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gH}$$

Como os dois lados são positivos, podemos elevar ao quadrado:

$$V_0^2 \cos^2 \theta < 4\mu^2 (V_0^2 \sin^2 \theta + 2gH)$$

$$V_0^2 (\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta) < 8\mu^2 gH$$

Veja que temos dois casos:

1) Se  $\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta < 0$ , então qualquer valor de  $V_0$  (e portanto de  $V$ ) satisfaz a relação acima. Isso é porque o coeficiente de atrito é relativamente alto. Claro, em uma situação real, a velocidade tem que ser grande o suficiente para passar pela rede, mas não é necessário explicitar isso quantitativamente.

2) Se  $\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta > 0$ , podemos passar dividindo e já substituir  $V_0 = \frac{2V}{7}$ :

$$V < 7\mu \sqrt{\frac{2gH}{(\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta)}}$$

Ou seja, nesse segundo caso a velocidade não pode ser tão grande, senão o atrito não é capaz de revertê-la.

Ao final dessa solução, você pode estar se perguntando: por que foi importante a bolinha estar girando se nem usamos esse fato? Bem, na prática você sabe que ela tem que estar girando para quicar para trás, não é? Embora isso não apareça explicitamente nessa solução, é *somente* porque a bolinha está girando relativamente rápido que a velocidade do ponto de contato em relação ao chão é alta o suficiente para que o atrito se mantenha cinético do começo ao fim da colisão, fato esse que usamos. Caso contrário, se não houvesse rotação, o atrito se tornaria zero antes da velocidade trocar de direção (a velocidade do ponto de contato se anularia já que uma rotação contrária à nossa cancelaria a velocidade enquanto essa ainda fosse positiva).

### Item b

É fácil ver que a bola emerge na vertical quando a velocidade horizontal final é zero. Pelos resultados anteriores, isso é o que ocorre desde que (e desde que o ângulo e o atrito satisfaçam a condição que torna a expressão abaixo possível,  $\tan \theta < \frac{1}{2\mu}$ ):

$$V = 7\mu \sqrt{\frac{2gH}{(\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta)}}$$

Após a colisão, a variação de momento angular vale:

$$\Delta L = R\Delta P_x = RmV_0 \cos \theta$$

Assim, sabemos que  $\Delta\omega = \frac{\Delta L}{I}$ :

$$\omega_f = \omega_0 - \frac{RmV_0 \cos \theta}{\frac{2}{5}mR^2}$$

O sinal de menos é porque esse torque é no sentido de frear a velocidade angular original. Como a velocidade horizontal final é nula, isso significa que a velocidade angular não mudou de sentido ainda, e portanto podemos garantir que o torque não muda de direção. Vai ficar mais claro em instantes que  $\omega_f$  e  $\omega_0$  tem o mesmo sinal. Substituindo:

$$\omega_f = \frac{5V_0(1 - \cos \theta)}{2R}$$

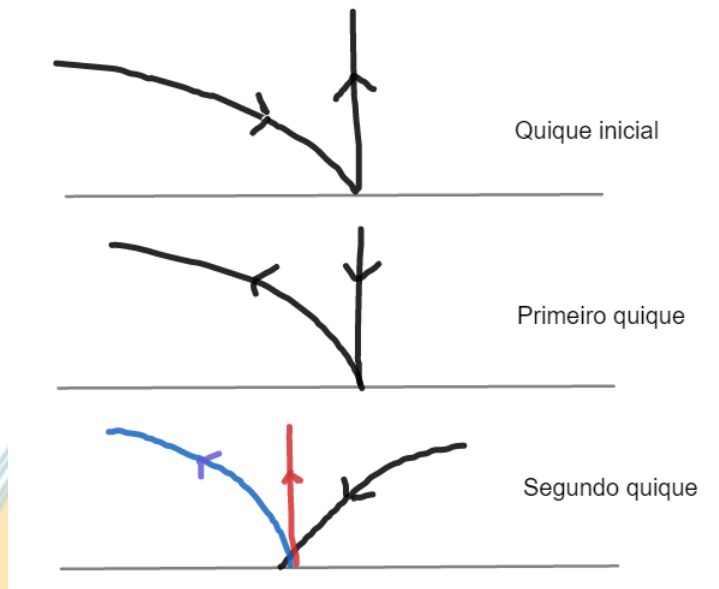
Como  $\cos \theta$  é sempre menor que 1,  $\omega$  e  $\omega_f$  estão no mesmo sentido. Substituindo a expressão para  $V_0$  no caso em que há emergência vertical:

$$\omega_f = \frac{5\mu(1 - \cos \theta)}{R} \sqrt{\frac{2gH}{(\cos^2 \theta - 4\mu^2 \sin^2 \theta)}}$$

Essa é a resposta do item b. Sobre o esboço do movimento subsequente:

Após a bola subir verticalmente para cima, ela quica para a esquerda já que sua velocidade angular estava no sentido anti-horário. Após esse quique, se valer a condição do enunciado do atrito ser sempre cinético, a velocidade angular se torna  $\omega(1 - 2 \cos \theta)$  e sua velocidade para a esquerda é  $mV_0 \cos \theta$ . Agora, para o segundo quique, note que o sentido da força de atrito é o mesmo durante toda a colisão, caso contrário o atrito se tornaria estático em algum momento, contrariando a nossa hipótese. Assim, a variação de momento na horizontal será  $mV_0 \cos \theta$ , e o sentido dessa variação depende do sentido da velocidade relativa entre o ponto de contato e o chão. Assim, temos dois casos:

- 1) Se  $\omega(1 - 2 \cos \theta) \times R > mV_0 \cos \theta$ , a bola quica para a esquerda mais uma vez (curva azul).
- 2) Se  $\omega(1 - 2 \cos \theta) \times R < mV_0 \cos \theta$ , a bola quica para cima (curva vermelha).



Honestamente, em uma situação real, é difícil que a condição do enunciado de atrito cinético se satisfaça, e nesse caso seria impossível determinar os movimentos subseqüente sem conhecer suas propriedades elásticas (para poder saber, por exemplo, a duração da colisão). Nesse caso, o problema em questão deixaria de pertencer somente à mecânica clássica e envolveria também a teoria de elasticidade.