Campeonato de Física 2020

Davi Maciel

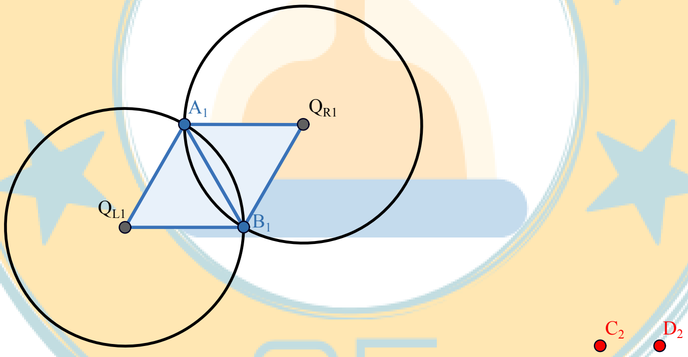
21 de Setembro

Solução do Problema 3 - Grupos B e C

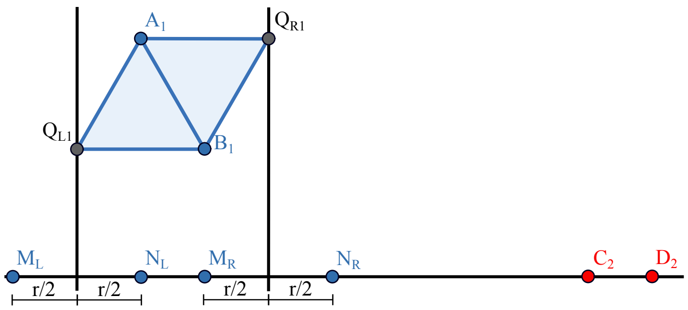
Luz giratória

Parte I

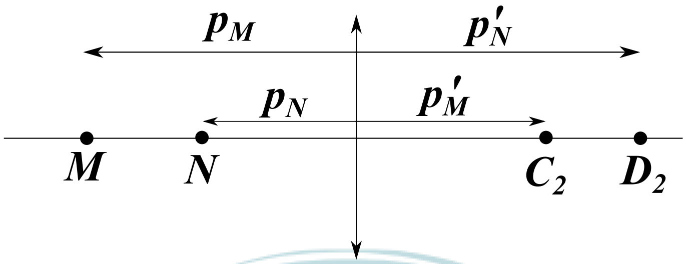
Chamemos o centro do bambolê de Q. Perceba que $\alpha = \angle AQB = \pi/3$ e $\overline{QA} = \overline{QB} = r$, ou seja, ΔABQ é equilátero. Dados os ponto A_1 e B_1, temos duas posições possíveis para Q_1: Q_{L1} e Q_{R1}.



Como as imagens C_2 e D_2 estão sobre o eixo óptico da lente, seus objetos, A_2 e B_2, devem estar sobre o eixo óptico. Assim, utilizando também o fato de que o centro de massa do bambolê (Q) cairá na direção da gravidade (queda livre), encontramos as possíveis posições de A_2 e B_2: M_L, N_L, M_R e N_R.



A lente deve estar entre objetos e imagens, já que estas últimas são reais. Usando o fato de que quanto mais próximo o objeto da lente (sem passar do ponto focal anterior), mais distante sua imagem, temos:



Observe que as medidas de $x = \overline{MN}$, $y = \overline{NC_2}$ e $z = \overline{C_2D_2}$ podem ser encontradas (através do Geogebra ou do uso de uma régua), então é interessante usá-las em nossas equações. Podemos utilizar a equação dos pontos conjugados para fazer uma análise das possíveis posições e valores de distância focal da lente:

$$p_M - p_N = x \rightarrow p_M = x + p_N \tag{1}$$

$$p_N + p'_M = y \rightarrow p'_M = y - p_N \tag{2}$$

$$p'_N - p'_M = z \rightarrow p'_N = z + p'_M \tag{3}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_M} + \frac{1}{p'_M} \rightarrow p_M \cdot p'_M = f(p_M + p'_M) \tag{4}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_N} + \frac{1}{p'_N} \rightarrow p_N \cdot p'_N = f(p_N + p'_N) \tag{5}$$

(2) em (3):

$$p'_N = z + y - p_N \tag{6}$$

(1) e (2) em (4):

$$(x + p_N)(y - p_N) = f(x + y) \tag{7}$$

(6) em (5):

$$p_N(y + z - p_N) = f(y + z) \tag{8}$$

(7) dividido por (8):

$$\frac{x+y}{y+z} = \frac{(x+p_N)(y-p_N)}{p_N(y+z-p_N)}$$
$$\frac{x+y}{y+z} = \frac{xy + (y-x)p_N - p_N^2}{(y+z)p_N - p_N^2}$$
$$(x+y)[(y+z)p_N - p_N^2] = (y+z)[xy + (y-x)p_N - p_N^2]$$

$(x+y)(y+z)p_N - (x+y)p_N^2 = xy(y+z) + (y-x)(y+z)p_N - (y+z)p_N^2$

$(x-z)p_N^2 - 2x(y+z)p_N + xy(y+z) = 0$

$\Delta = 4x^2(y+z)^2 - 4(x-z)xy(y+z)$

$\Delta = 4x(y+z)[x(y+z) - y(x-z)]$

$\Delta = 4xz(x+y)(y+z)$

$p_N = \dfrac{2x(y+z) \pm \sqrt{4xz(x+y)(y+z)}}{2(x-z)}$

Chegamos em:

$$p_N = \frac{x(y+z) \pm \sqrt{xz(x+y)(y+z)}}{(x-z)} \tag{9}$$

Temos que $x = \overline{M_L N_L} = \overline{M_R N_R} = \overline{AB} = 1,00\ m$, $z = \overline{C_2 D_2} = 0,50\ m$ e $y = y_L = \overline{N_L C_2} = 3,50\ m$ ou $y = y_R = \overline{N_R C_2} = 2,00\ m$. Assim, $y > x > z$. Com esta informação, podemos concluir que os dois valores de p_N são maiores que zero, já que:

$x > z$

$xy > yz$

$xy + xz > xz + yz$

$x(y+z) > z(x+y)$

$x^2(y+z)^2 > xz(x+y)(y+z)$

$x(y+z) > \sqrt{xz(x+y)(y+z)}$

Porém, ainda precisamos checar se os dois valores de p_N fazem sentido físico. Para isso, basta checar se $p'_M = y - p_N > 0$ (imagem real).

Primeiro caso:

$p'_M = y - \dfrac{x(y+z) - \sqrt{xz(x+y)(y+z)}}{(x-z)}$

$p'_M = \dfrac{y(x-z) - x(y+z) + \sqrt{xz(x+y)(y+z)}}{(x-z)}$

$p'_M = \dfrac{\sqrt{xz(x+y)(y+z)} - z(x+y)}{(x-z)}$

Esse caso é válido pois:

$x > z$

$xy > yz$

$xy + xz > xz + yz$

$x(y+z) > z(x+y)$

$xz(x+y)(y+z) > z^2(x+y)^2$

$\sqrt{xz(x+y)(y+z)} > z(x+y)$

O segundo caso é inválido pois:

$$p'_M = \frac{-\sqrt{xz(x+y)(y+z)} - z(x+y)}{(x-z)} < 0$$

Podemos então achar a localização da lente a sua distância focal para $Q = Q_L$:

$$p_{N_L} = \frac{x(y_L+z) - \sqrt{xz(x+y_L)(y_L+z)}}{(x-z)}$$

$$p_{N_L} = \frac{1,00(3,50+0,50) - \sqrt{1,00 \cdot 0,50(1,00+3,50)(3,50+0,50)}}{(1,00-0,50)}$$

$$\boxed{p_{N_L} = 2,00\ m}$$

$$f_L(y+z) = p_{N_L}(y+z-p_{N_L})$$

$$f_L = \frac{p_{N_L}(y+z-p_{N_L})}{y+z}$$

$$f_L = \frac{2,00(3,50+0,50-2,00)}{3,50+0,50}$$

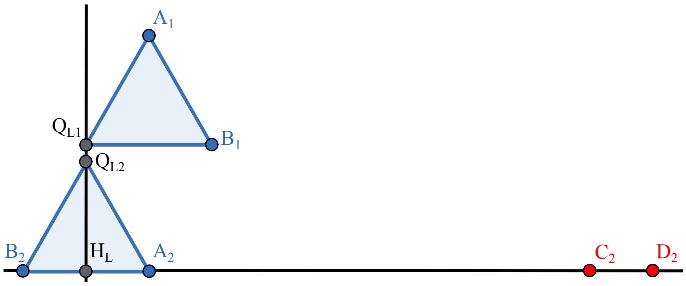
$$\boxed{f_L = 1,00\ m}$$

Assim, a lente está a esquerda de C_2 a uma distância $p'_{M_L} = y - p_{N_L} = 3,50 - 2,00 = 1,50\ m$ e possui uma distância focal $f_L = 1,00\ m$.
Repetindo o processo anterior para $Q = Q_R$, encontramos:

$$\boxed{p_{N_R} = 1,13\ m \text{ e } f_R = 0,62\ m}$$

Assim, a lente está a esquerda de C_2 a uma distância $p'_{M_R} = y - p_{N_R} = 2,00 - 1,13 = 0,87\ m$ e possui uma distância focal $f_L = 0,62\ m$.
Vamos agora calcular os valores das possíveis velocidades angulares. Para isso, iremos analisar quatro casos, intitulados L, L', R e R'.

Caso L



Podemos medir $\overline{Q_{L1}H_L}$ para achar $\overline{Q_{L1}H_L} = 1,00\ m$. O segmento $\overline{Q_{L2}H_L}$ é a altura do $\Delta A_2B_2Q_{L2}$, ou seja, $\overline{Q_{L2}H_L} = r\sqrt{3}/2 = 1,00 \cdot \sqrt{3}/2 = 0,87\ m$. Assim, encontramos [1] $\overline{Q_{L1}Q_{L2}}$:

$$\overline{Q_{L1}Q_{L2}} = \overline{Q_{L1}H_L} - \overline{Q_{L2}H_L} = 1,00 - 0,87 = 0,13\ m$$

O tempo de queda pode então ser calculado:

$$\Delta t_L = \sqrt{\frac{2\overline{Q_{L1}Q_{L2}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,13}{9,81}} = 0,16\ s$$

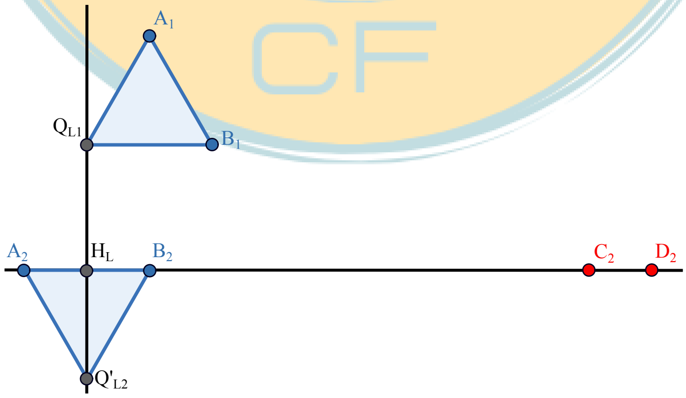
O bambolê girou de um ângulo $\Delta\theta_L$ da forma:

$$\Delta\theta_L = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z$$

Podemos então achar a velocidade angular do bambolê no Caso L:

$$\omega_L = \frac{\Delta\theta_L}{\Delta t_L} = \frac{2\pi}{3 \cdot 0,16} + \frac{2\pi}{0,16}k \rightarrow \boxed{\omega_L = (13,09 + 39,27k)\ rad/s}$$

Caso L'



O segmento $\overline{Q'_{L2}H_L}$ é a altura do $\Delta A_2B_2Q'_{L2}$, ou seja, $\overline{Q'_{L2}H_L} = r\sqrt{3}/2 = 1,00 \cdot \sqrt{3}/2 = 0,87\ m$. Assim, encontramos $\overline{Q_{L1}Q'_{L2}}$:

[1] Também poderíamos ter simplesmente medido $\overline{Q_{L1}Q_{L2}}$ com o Geogebra.

$$\overline{Q_{L1}Q'_{L2}} = \overline{Q_{L1}H_L} + \overline{Q'_{L2}H_L} = 1,00 + 0,87 = 1,87\ m$$

O tempo de queda pode então ser calculado:

$$\Delta t'_L = \sqrt{\frac{2\overline{Q_{L1}Q'_{L2}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,87}{9,81}} = 0,62\ s$$

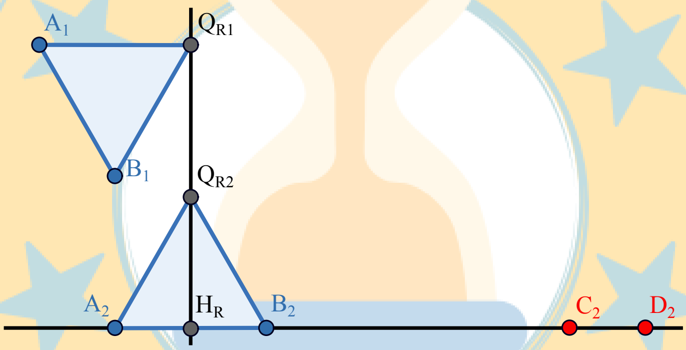
O bambolê girou de um ângulo $\Delta\theta'_L$ da forma:

$$\Delta\theta'_L = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z$$

Podemos então achar a velocidade angular do bambolê no Caso L':

$$\omega'_L = \frac{\Delta\theta'_L}{\Delta t'_L} = \frac{5\pi}{3 \cdot 0,62} + \frac{2\pi}{0,62}k \rightarrow \boxed{\omega'_L = (8,45 + 10,13k)\ rad/s}$$

Caso R



Podemos medir $\overline{Q_{R1}H_R}$ para achar $\overline{Q_{R1}H_R} = 1,87\ m$. O segmento $\overline{Q_{R2}H_R}$ é a altura do $\Delta A_2B_2Q_{R2}$, ou seja, $\overline{Q_{R2}H_R} = r\sqrt{3}/2 = 1,00 \cdot \sqrt{3}/2 = 0,87\ m$. Assim, encontramos $\overline{Q_{R1}Q_{R2}}$:

$$\overline{Q_{R1}Q_{R2}} = \overline{Q_{R1}H_R} - \overline{Q_{R2}H_R} = 1,87 - 0,87 = 1,00\ m$$

O tempo de queda pode então ser calculado:

$$\Delta t_R = \sqrt{\frac{2\overline{Q_{R1}Q_{R2}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,00}{9,81}} = 0,45\ s$$

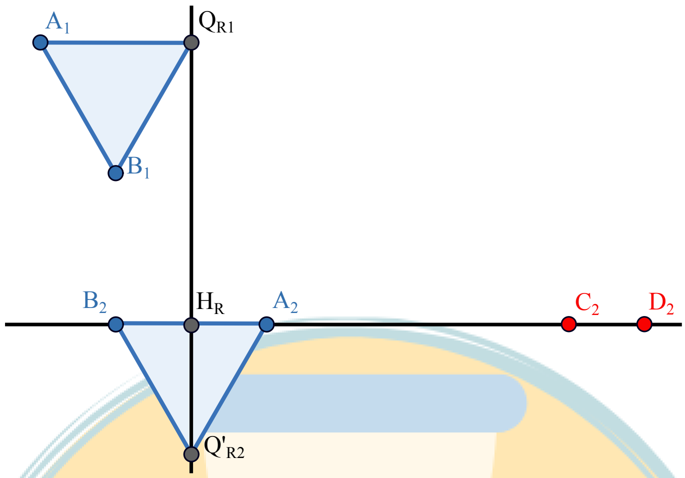
O bambolê girou de um ângulo $\Delta\theta_R$ da forma:

$$\Delta\theta_R = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z$$

Podemos então achar a velocidade angular do bambolê no Caso R:

$$\omega_R = \frac{\Delta\theta_R}{\Delta t_R} = \frac{5\pi}{3 \cdot 0,45} + \frac{2\pi}{0,45}k \rightarrow \boxed{\omega_R = (11,64 + 13,96k)\ rad/s}$$

Caso R'



O segmento $\overline{Q'_{R2}H_R}$ é a altura do $\Delta A_2B_2Q'_{R2}$, ou seja, $\overline{Q'_{R2}H_R} = r\sqrt{3}/2 = 1,00 \cdot \sqrt{3}/2 = 0,87\ m$. Assim, encontramos $\overline{Q_{R1}Q'_{R2}}$:

$$\overline{Q_{R1}Q'_{R2}} = \overline{Q_{R1}H_R} + \overline{Q'_{R2}H_R} = 1,87 + 0,87 = 2,74\ m$$

O tempo de queda pode então ser calculado:

$$\Delta t'_R = \sqrt{\frac{2\overline{Q_{R1}Q'_{R2}}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,74}{9,81}} = 0,75\ s$$

O bambolê girou de um ângulo $\Delta\theta'_R$ da forma:

$$\Delta\theta'_R = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z$$

Podemos então achar a velocidade angular do bambolê no Caso R':

$$\omega'_R = \frac{\Delta\theta'_R}{\Delta t'_R} = \frac{2\pi}{3 \cdot 0,75} + \frac{2\pi}{0,75}k \rightarrow \boxed{\omega'_R = (2,79 + 8,38k)\ rad/s}$$

Parte II

Primeiramente, vamos analisar a imagem de uma reta formada por uma lente convergente ideal para encontrar duas propriedades que nos vão ser úteis. Considere um plano cartesiano. Existe uma lente convergente ideal de distância focal f com eixo principal no eixo y e centro em $(0,0)$. Vamos usar a equação dos pontos conjugados e o aumento linear para encontrar a imagem de uma reta $o(x) = ax + b$:

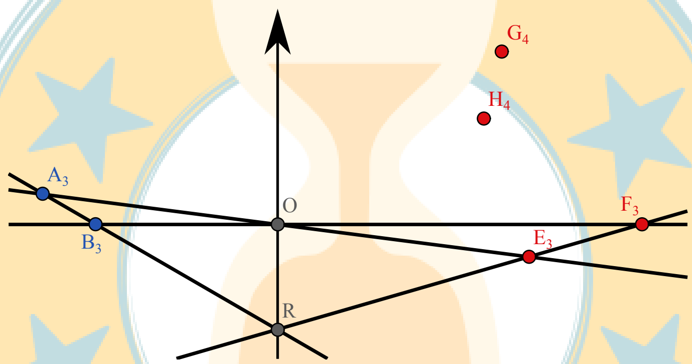
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x'} \tag{10}$$

$$\frac{i}{0} = \frac{x'}{x} \rightarrow i = \frac{x'}{x} o = \frac{x'}{x}(ax + b) \rightarrow i = x'(a + b/x) \tag{11}$$

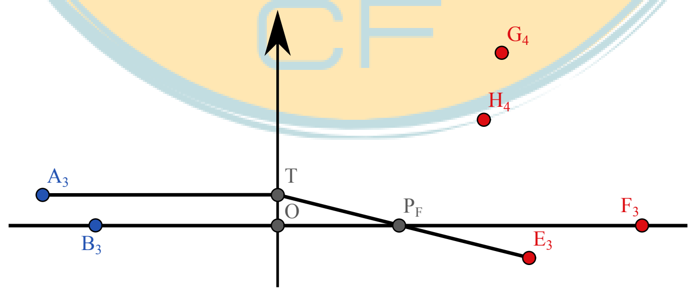
(10) em (11):

$$i = x'(a + b/f + b/x') \rightarrow i = (a + b/f)x' + b$$

Observe que o sentido positivo da posição da imagem no referencial da equação dos pontos conjugados está no sentido negativo do eixo x no plano cartesiano. Encontramos então as duas propriedades desejadas. Propriedade 1: a imagem de uma reta é uma reta [2]. Propriedade 2: o coeficiente linear da imagem é o mesmo do objeto, ou seja, o ponto de interseção está no eixo principal da lente. Podemos então traçar as retas $\overleftrightarrow{A_3B_3}$ e $\overleftrightarrow{E_3F_3}$ para encontrarmos um ponto do eixo principal da lente. É útil também traçar as retas $\overleftrightarrow{A_3E_3}$ e $\overleftrightarrow{B_3F_3}$, já que o ponto de interseção é o centro da lente [3]. Com dois pontos no eixo principal da lente, nós conseguimos efetivamente encontrar sua posição:



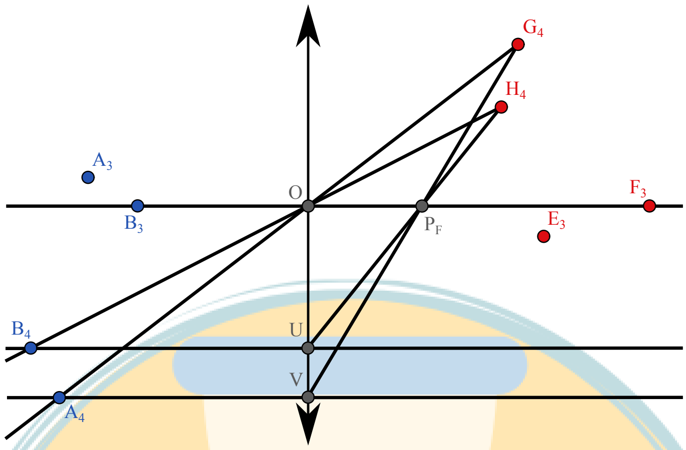
Utilizando o Geogebra , podemos ver que $\angle ROB_3 = \angle ROF_3 = \pi/2$, ou seja, o eixo óptico da lente passa por B_3 e F_3. Sabendo a posição da lente e de um par objeto-imagem, podemos encontrar um ponto focal [4] e, consequentemente, a distância focal:



Observe que um raio luminoso que sai de A_3 paralelamente ao eixo óptico será desviado na lente e passará pelo ponto focal P_F antes de chegar em E_3. Medindo OP_F, encontramos o valor $f = 2,00\ m$ para a distância focal da lente.

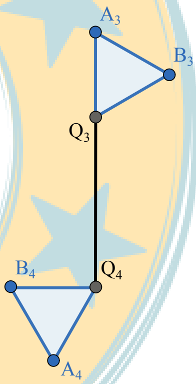
[2] Na realidade são duas semirretas colineares.
[3] Raios de luz que passam pelo centro da lente não sofrem desvio.
[4] Para encontrar o outro é só fazer uma reflexão com relação à lente.

Também podemos medir OB_3 para acharmos o valor $\overline{OB_3} = 3,00\ m$ para a distância entre o centro da lente e B_3. Agora, vamos encontrar A_4 e B_4:



Aqui utilizamos o fato de que um raio luminoso que passa por um ponto focal se torna paralelo ao eixo óptico após ser desviado pela lente.

Enfim, podemos medir o deslocamento do centro de massa do bambolê para calcular seu tempo e queda e então obtermos sua velocidade angular. Medindo a distância entre Q_3 e Q_4, obtemos $\overline{Q_3Q_4} = 2,00\ m$. O tempo de queda é:



$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\overline{Q_3Q_4}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,00}{9,81}} = 0,64\ s$$

O bambolê girou de um ângulo $\Delta\theta$ da forma:

$$\Delta\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$$

Finalmente, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{7\pi}{6 \cdot 0,64} + \frac{2\pi}{0,64}k \rightarrow \boxed{\omega = (5,73 + 9,82k)\ rad/s}$$

Análise 1: O número de algarismos significativos depende do método escolhido para fazer as medidas. Então resolveu-se utilizar duas casas decimais em todos os valores numéricos, para haver uma uniformidade.

Análise 2: O sentido positivo da rotação é o horário.