Campeonato de Física 2020

Gabriel Telles

28 de setembro

Problema 4 - Grupo A - Solução Oficial

Tempo de Reação

Item a)

Podemos colocar uma das extremidades da régua rente à mão, mas sem encostar, e pedir para outra pessoa segurar a outra extremidade da régua. Sem avisar previamente, a outra pessoa deve soltar a régua e você precisa tenta segurá-la. A marcação na régua onde você segurou é a altura que ela caiu. Sabendo essa altura, podemos calcular o tempo de queda, que será justamente o tempo de reação.

Item b)

Uma vez medida a altura de que a régua caiu, podemos calcular seu tempo de queda por meio da equação $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, em que $g = 9,8\, m/s^2$ é a aceleração da gravidade. [h] Podemos calcular o tempo de reação τ como a média dos

Tabela 1: Tempo de reação em função da altura de queda

Medida	1	2	3	4	5
h (cm)	13,0	7,0	15,9	13,2	10,1
Δt (s)	0,163	0,120	0,180	0,164	0,144

tempos de reação Δt. Assim:

$$\tau = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5} \Delta t_n = \frac{0,163 + 0,120 + 0,180 + 0,164 + 0,144}{5} \approx 0,15\, s$$

Pêndulo simples

Item c)

Para a construção do pêndulo simples, foi usada uma porca como objeto e um pedaço de linha de costura como fio. Para o suporte, usou-se um gancho que havia na cozinha. Ressaltamos que não havia necessidade nenhuma de usar os mesmos materiais que usamos.

Figura 1: Materiais usados para a construção do pêndulo

Figura 2: Pêndulo simples montado

Item d)

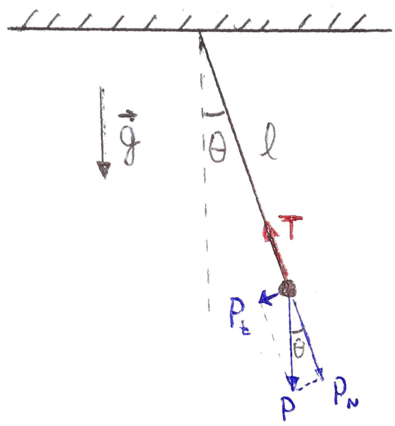


Figura 3: Diagrama de forças de um pêndulo simples

Decompondo a força peso na direção tangencial ao movimento:

$$P_t = P \cdot sen(\theta)$$

Uma vez que a tração atua apenas na direção normal ao movimento, podemos utilizar a 2ª lei de Newton:

$$F_R = ma = -Psen(\theta)$$

Perceba que o sinal negativo existe pois a força age contra o sentido positivo adotado para o ângulo. Para o movimento circular, a aceleração é dada por

$$a = \ell\,\alpha$$

Em que α é a aceleração angular. Portanto:

$$\begin{aligned} m\,a &= -P\,sen(\theta) \\ m\,\ell\,\alpha &= -m\,g\,sen(\theta) \\ \ell\,\alpha &\approx -g\,\theta \\ \alpha &= -\frac{g}{\ell}\theta \end{aligned}$$

Sempre que um movimento for da forma (*aceleração*) = -ω^2 (*coordenada*) para uma dada constante ω, e alguma coordenada (uma posição, um ângulo, etc.), ele será um Movimento Harmônico Simples (MHS),e portanto terá um período dado por $T = 2\pi/\omega$. Neste caso, $\omega^2 = g/\ell$, logo $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Dessa forma, o período é $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

Item e)

Tabela 2: Período em função do comprimento

$(\ell \pm 0,001)\,m$	$(T \pm 0,015)\,s$
0,872	1,882
0,823	1,828
0,783	1,788
0,741	1,738
0,704	1,697
0,655	1,634
0,557	1,508
0,520	1,461
0,492	1,416
0,481	1,399
0,440	1,342
0,392	1,264
0,341	1,185
0,287	1,083
0,245	1,005
0,198	0,892
0,163	0,814
0,120	0,696

A incerteza na medida do comprimento foi estimada como a menor marcação no instrumento de medida, que foi uma régua milimetrada, logo $\delta\ell = 1\,mm$. Também seria aceitável usar a metade da menor marcação $(0,5\,mm)$, adicionando assim um algarismo significativo, mas como havia um nó no suporte do pêndulo e outro nó segurando a rosca ao fio, uma incerteza mais conservadora é mais adequada.

A incerteza no período teve como contribuição principal[1] o tempo de reação, já calculado anteriormente em $\tau = 0,15\,s$. Para diminuir a incerteza na medida do período, foi medido o tempo transcorrido em 10 oscilações do pêndulo, e esse valor foi dividido por 10 para obter o período. Dessa forma, a incerteza no período também é dividida por 10:

$$10\,T = T_{medido} \pm \tau \Rightarrow T = \frac{T_{medido}}{10} \pm \frac{\tau}{10}$$

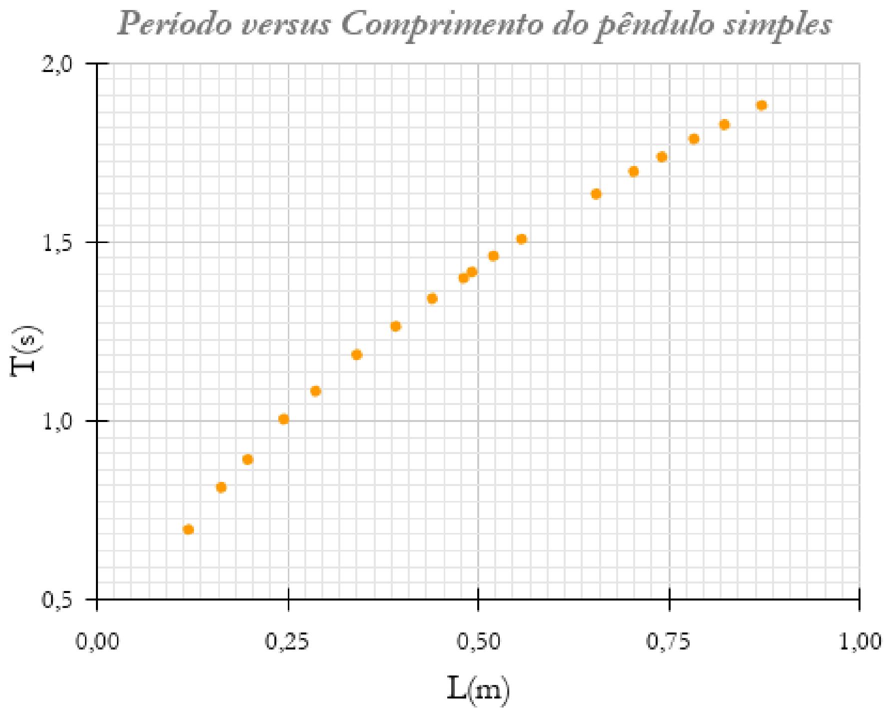
Assim, a incerteza devida ao tempo de reação é:

$$\delta T = \frac{\tau}{10} = \frac{0,15}{10}\,s = 0,015\,s$$

[1] Também há incerteza no cronômetro usado. Entretanto, cronômetros de celular costumam ter precisão de centésimos de segundo, e como dividimos por 10 os valores medidos, essa incerteza instrumental seria de um milésimo de segundo $(0,001s)$. Como o erro instrumental e o erro humano são independentes, devem ser somados em quadratura: $\sqrt{0,015^2 + 0,001^2} \approx 0,015$.

Item f)

Representamos os dados coletados em um gráfico de T em função de ℓ. As barras de erro eram pequenas demais para serem representadas adequadamente neste gráfico.



Note alguns dos aspectos essenciais do gráfico, como título do mesmo, título dos eixos, unidades dos eixos, divisões uniformemente espaçadas e um bom uso do espaço do gráfico.

Item g)

Para conseguir uma equação linearizada, podemos elevar a equação do pêndulo ao quadrado:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell$$

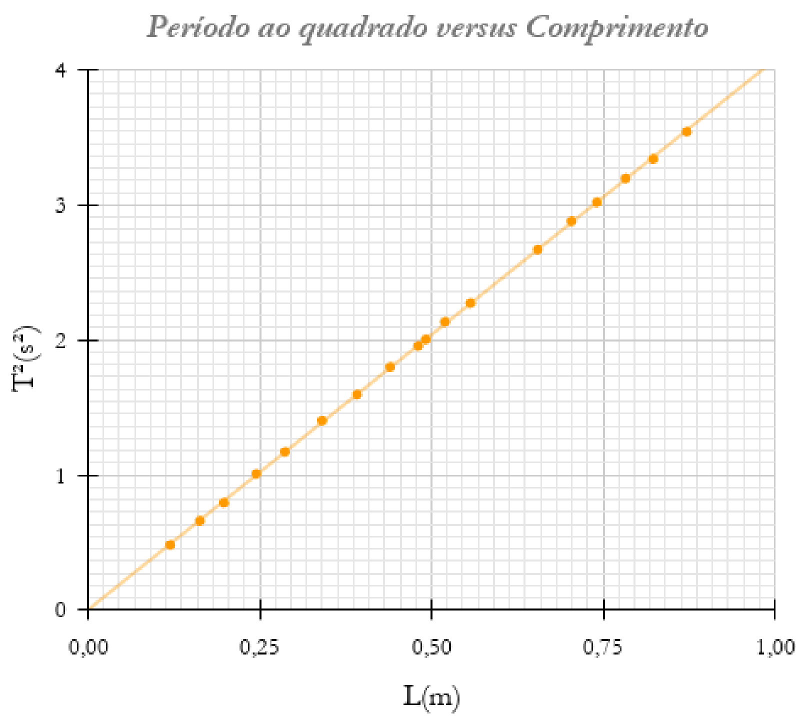
Assim, podemos elevar todos os períodos ao quadrado e utilizá-los como a nova variável dependente. Obtém-se a seguinte tabela:

Equação da reta calculada pelo Método dos Mínimos Quadrados:

$$T^2 = 4,0711\,\ell + 0,0038$$

Tabela 3: Quadrado do período em função do comprimento

$\ell\,(m)$	$T^2\,(s^2)$
0,872	3,542
0,823	3,342
0,783	3,197
0,741	3,021
0,704	2,880
0,655	2,670
0,557	2,274
0,520	2,135
0,492	2,005
0,481	1,957
0,440	1,801
0,392	1,598
0,341	1,404
0,287	1,173
0,245	1,010
0,198	0,796
0,163	0,663
0,120	0,484



Item h)

A partir da equação acima, obtemos os coeficientes linear (A) e angular (B):

$$B = 4,071\, s^2/m$$
$$A = 0,0038\, s^2$$

As equações para a incerteza nesses coeficientes são:

$$\delta B = B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2}-1}{n-2}} \qquad \delta A = \delta B\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

Em que n é o número de medidas e r é o Coeficiente de Correlação Linear, calculado facilmente pela maioria das calculadoras científicas e também por programas como Excel e Google Sheets. Seu valor varia de -1 a $+1$. Quanto mais próximo seu módulo for de 1, mais forte é a correlação entre os dados. O seu sinal indica uma correlação positiva (reta crescente) ou negativa (reta decrescente). Sua fórmula é:

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})\sum(y_i - \overline{y})}}$$

Para este experimento, obtemos $r = 0,999961$. Observa-se fortíssima correlação linear entre as variáveis ℓ e T^2.

Realizando os cálculos das incertezas nos coeficientes, obtemos:

$$\delta B = 0,009\, s^2/m$$
$$\delta A = 0,005\, s^2$$

Note que $\delta A > A$, ou seja, $A = 0$ dentro da margem de erro, conforme esperado pela equação teórica, que não apresenta nenhum coeficiente linear. Além disso, conseguimos:

$$B = (4,071 \pm 0,009)\, s^2/m$$

Uma vez que $B = 4\pi^2/g$, podemos isolar a aceleração da gravidade: $g = 4\pi^2/B$. Para encontrar a incerteza *estatística* em g, podemos propagar a incerteza em B, por meio da fórmula (válida para casos de multiplicação ou divisão de uma variável): $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta B}{B}$. Assim, temos:

$$g = \frac{4\pi^2}{B} \approx \frac{4 \cdot 3,1416^2}{4,071}$$
$$g = 9,697\, m/s^2$$

$$\delta g_{stat} = \frac{g \cdot \delta B}{B} = \frac{9,697 \cdot 0,009}{4,071}$$
$$\delta g_{stat} = 0,021 m/s^2$$

Entretanto, ainda é necessário considerar a incerteza sistemática. Dado que $g = 4\pi^2\ell/T^2$, a incerteza em g causada pelas incertezas em ℓ e em T é:

$$\left(\frac{\delta g_{sist}}{g}\right)^2 = \left(\frac{\delta \ell_{sist}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{2\delta T_{sist}}{T}\right)^2$$

Como visto no item "e", as incertezas são: $\delta \ell_{sist} = 0,001\,m$ e $\delta T_{sist} = 0,015\,s$. Há de se notar, todavia, que a fórmula acima produz erro diferentes para valores diferentes de ℓ e de T, de forma que não seja óbvio qual valor usar. Porém, dado que fizemos uma regressão linear (o que considera todas as medidas), o mais razoável é utilizar os valores médios $\overline{\ell} = 0,490\,m$ e $\overline{T} = 1,368\,s$ na fórmula. Dessa forma,

$$\delta g_{sist} = g\sqrt{\left(\frac{\delta \ell_{sist}}{\overline{\ell}}\right)^2 + \left(\frac{2\delta T_{sist}}{\overline{T}}\right)^2}$$

$$\delta g_{sist} = 9,70\sqrt{\left(\frac{0,001}{0,490}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,015}{1,368}\right)^2}$$

$$\delta g_{sist} = 0,074\,m/s^2$$

Por fim, podemos combinar as incertezas estatísticas e sistemáticas. Não há nenhuma maneira definitivamente correta de fazer isso, mas o mais aceito é somar as incertezas em quadratura (como se fôssemos usar o Teorema de Pitágoras), pois assume-se que as incertezas não têm correlação. Assim:

$$\delta g = \sqrt{(\delta g_{sist})^2 + (\delta g_{stat})^2}$$

$$\delta g = \sqrt{(0,074)^2 + (0,02)^2}$$

$$\delta g = 0,08\,m/s^2$$

Portanto, o valor final encontrado para a aceleração da gravidade é:

$$\boxed{g = (9,70 \pm 0,08)\,m/s^2}$$

Item i)

O valor da aceleração da gravidade em São Paulo (local onde fiz o experimento) é $g = 9,79\,m/s^2$. Dessa forma, o valor teórico está bem no limite da margem de erro experimental, o que o torna aceitável. Possíveis efeitos qualitativos que expliquem um valor da gravidade medido ligeiramente menor do que o previsto são a resistência do ar e o atrito no suporte.