Campeonato de Física 2020

Gabriel Telles

28 de setembro

Problema 4 - Grupos B e C - Solução Oficial

Tempo de Reação

Item a)

Podemos colocar uma das extremidades da régua rente à mão, mas sem encostar, e pedir para outra pessoa segurar a outra extremidade da régua. Sem avisar previamente, a outra pessoa deve soltar a régua e você precisa tenta segurá-la. A marcação na régua onde você segurou é a altura que ela caiu. Sabendo essa altura, podemos calcular o tempo de queda, que será justamente o tempo de reação.

Item b)

Uma vez medida a altura de que a régua caiu, podemos calcular seu tempo de queda por meio da equação $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, em que $g = 9,8\, m/s^2$ é a aceleração da gravidade. [h] Podemos calcular o tempo de reação τ como a média dos

Tabela 1: Tempo de reação em função da altura de queda

Medida	1	2	3	4	5
h (cm)	13,0	7,0	15,9	13,2	10,1
Δt (s)	0,163	0,120	0,180	0,164	0,144

tempos de reação Δt. Assim:

$$\tau = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5} \Delta t_n = \frac{0,163 + 0,120 + 0,180 + 0,164 + 0,144}{5} \approx 0,15\, s$$

Pêndulo físico

Item c)

O pêndulo foi feito a partir do papelão de uma tampa de caixa de sapato. Ele possui dimensões $b = (328 \pm 1)\,mm$ e $h = (210 \pm 1)\,mm$. Para localizar o centro de massa, foram traçadas as duas diagonais do retângulo, e marcou-se o centro de massa na intersecção delas. Para verificar que a posição estava correta, tentamos equilibrar o pêndulo, por meio de um prego, nesse ponto, e ele ficou em equilíbrio. Além do papelão, usamos um pequeno prego, de diâmetro de cerca de $2\,mm$, e um buraco pré-existente na parede, onde fica um calendário.

Figura 1: Materiais usados para confeccionar o pêndulo físico.

Figura 2: Pêndulo físico já montado.

Item d)

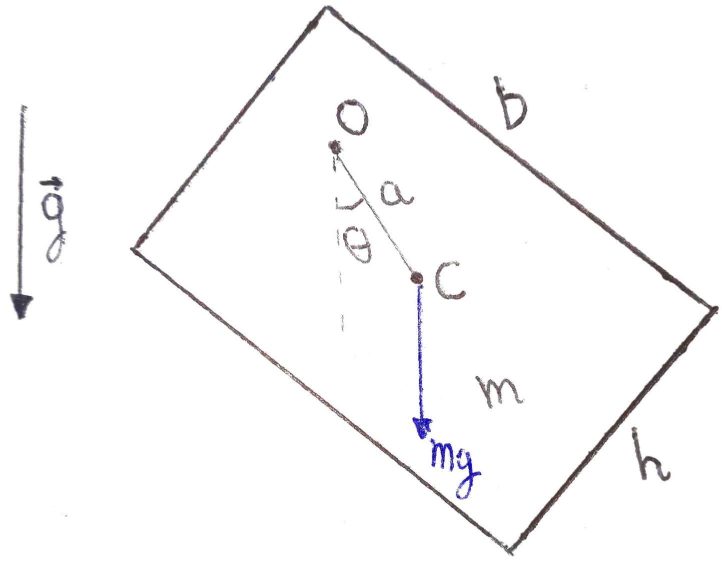

Figura 3: Diagrama de forças do pêndulo físico.

O momento de inércia em relação ao centro de massa de uma placa retangular de dimensões b e h é $I_c = m\frac{(b^2+h^2)}{12}$. Pelo Teorema dos Eixos Paralelos, o momento de inércia em relação a um eixo a uma distância a do CM é dado por $I = I_c + ma^2$. Podemos agora aplicar a 2ª lei de newton para a rotação. O momento resultante é dado por:

$$\tau = I\ddot{\theta} = -(mg\sin\theta)a$$

Para ângulos pequenos, $\sin\theta \approx \theta$. Portanto:

$$I\ddot{\theta} = -mga\theta$$
$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{mga}{I}\right)\theta$$

Essa é a equação de um MHS com frequência angular $\omega = \sqrt{mga/I}$. Portanto, o período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{I_c + ma^2}{ma}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{a + \frac{I_c}{ma}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{a + \frac{b^2 + h^2}{12a}}$$

Para simplificar a notação, adotaremos $J = I_c/m = (b^2 + h^2)/12$. Logo, o período fica

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{a + \frac{J}{a}}$$

O gráfico da função T(a) é:

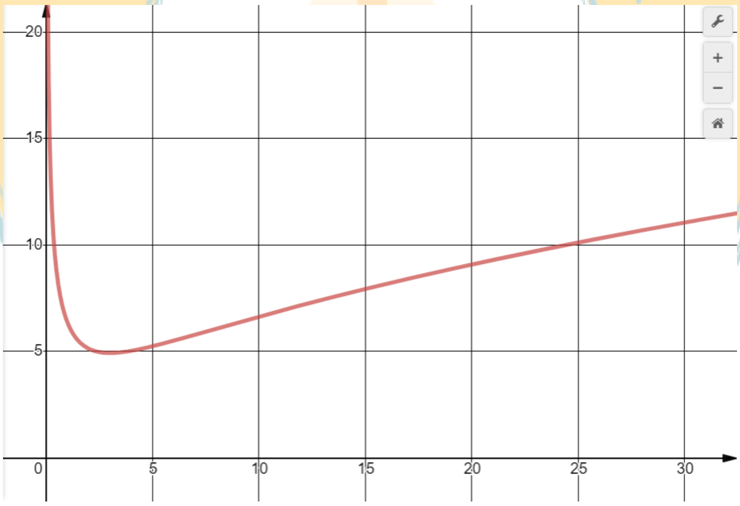

Figura 4: Gráfico T(a) feito no Desmos.

Encontrar o mínimo de T é equivalente a encontrar o mínimo de $\sqrt{a + J/a}$, o que equivale a encontrar o mínimo do argumento da raiz quadrada. É um fato matemático que quando o produto de duas variáveis é constante (no caso, a multiplicado por J/a é a constante J) a soma delas é mínima quando elas são iguais. Portanto, no caso de período mínimo, $a = J/a$, logo $a_{min} = \sqrt{J} = \sqrt{I_c/m}$.

Item e)

Tabela 2: Período em função da distância a

$(a \pm 1)\,mm$	$(T \pm 0,015)\,s$
20	1,640
30	1,331
41	1,175
52	1,090
60	1,057
71	0,999
79	0,984
90	0,964
95	0,962
100	0,958
103	0,964
107	0,954
109	0,960
115	0,952
120	0,953
130	0,941
140	0,959
149	0,979
160	0,986

A incerteza na medida do comprimento foi estimada como a menor marcação no instrumento de medida, que foi uma régua milimetrada, logo $\delta a = 1\,mm$. Também seria aceitável usar a metade da menor marcação ($0,5\,mm$), adicionando assim um algarismo significativo, mas considerando o diâmetro dos furos no corpo, uma incerteza mais conservadora é mais adequada.

A incerteza no período teve como contribuição principal[1] o tempo de reação, já calculado anteriormente em $\tau = 0,15\,s$. Para diminuir a incerteza na medida do período, foi medido o tempo transcorrido em 10 oscilações do pêndulo, e esse valor foi dividido por 10 para obter o período. Dessa forma, a incerteza no período também é dividida por 10:

$$10\,T = T_{medido} \pm \tau \Rightarrow T = \frac{T_{medido}}{10} \pm \frac{\tau}{10}$$

Assim, a incerteza devida ao tempo de reação é:

$$\delta T = \frac{\tau}{10} = \frac{0,15}{10}\,s = 0,015\,s$$

[1]Também há incerteza no cronômetro usado. Cronômetros de celular costumam ter precisão de centésimos de segundo, mas como dividimos por 10 os valores medidos, essa incerteza instrumental seria de um milésimo de segundo ($0,001s$). Como o erro instrumental e o erro humano são independentes, devem ser somados em quadratura: $\sqrt{0,015^2 + 0,001^2} \approx 0,015$.

Item f)

Representamos os dados coletados em um gráfico de T em função de a. As barras de erro eram pequenas demais para serem representadas adequadamente neste gráfico.

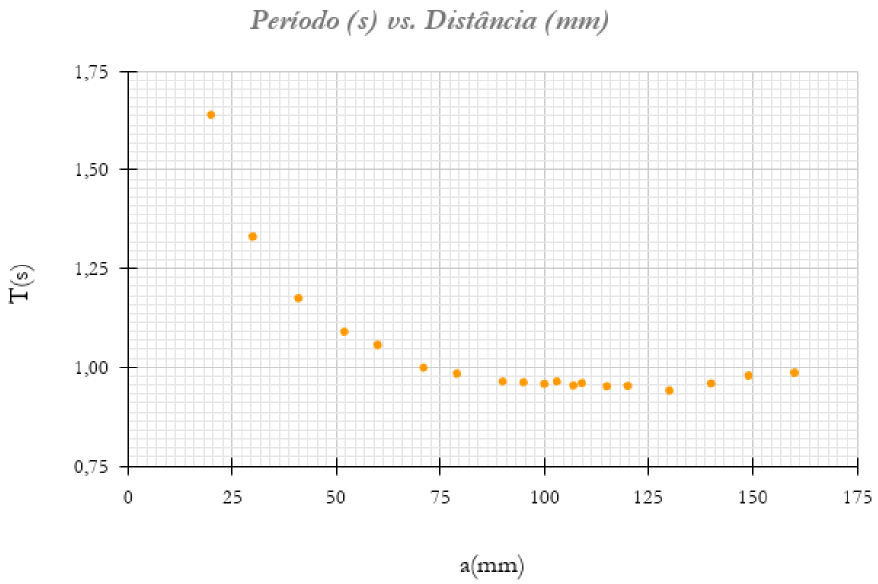

Figura 5: Gráfico do período T em função da distância a

Note alguns dos aspectos essenciais do gráfico, como título do mesmo, título dos eixos, unidades dos eixos, divisões uniformemente espaçadas e um bom uso do espaço do gráfico.

Item g)

A expressão do período é

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{a + \frac{J}{a}}$$

Elevando ao quadrado:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(a + \frac{J}{a}\right)$$

Multiplicando por a dos dois lados da equação:

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g}(a^2 + J)$$

Rearranjando os termos:

$$T^2 a = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)a^2 + \frac{4\pi^2 J}{g}$$

Se tomarmos $x = a^2$ e $y = T^2 a$, teremos uma equação linear, com coeficiente angular $B = \frac{4\pi^2}{g}$ e coeficiente linear $A = \frac{4\pi^2 J}{g}$.

Item h)

Calculando os valores das novas variáveis, obtemos a Tabela 3.

Tabela 3: Dados linearizados

$a^2(10^{-4}m^2)$	$T^2a\,(s^2\cdot m)$
4,0	0,0538
9,0	0,0531
16,8	0,0566
27,0	0,0618
36,0	0,0670
50,4	0,0709
62,4	0,0765
81,0	0,0836
90,3	0,0879
100,0	0,0918
106,1	0,0957
114,5	0,0974
118,8	0,1005
132,3	0,1042
144,0	0,1090
169,0	0,1151
196,0	0,1288
222,0	0,1428
256,0	0,1556

Equação da reta calculada pelo Método dos Mínimos Quadrados:

$$T^2a = 4,05\,a^2 + 0,051$$

Os coeficiente de correlação linear r foi $r = 0,9988$, o que indica a fortíssima correlação linear entre as variáveis. Calculamos as incertezas nos coeficientes linear A e angular B a partir das fórmulas:

$$\delta B = B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2}-1}{n-2}} \qquad \delta A = \delta B\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

Obtemos, assim,

$$B = (4,05 \pm 0,05)\,s^2/m$$
$$A = (0,051 \pm 0,005)\,s^2\cdot m$$

Dessa forma, podemos encontrar o valor de g e de J. Para a aceleração da gravidade:

$$g = \frac{4\pi^2}{B} = \frac{4\cdot 3.1416^2}{4,05}$$
$$g = 9,75\,m/s^2$$

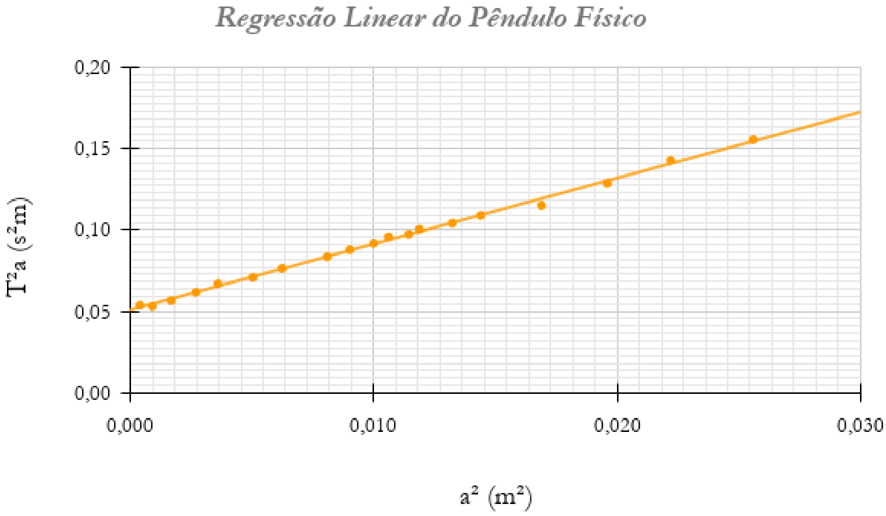

Figura 6: Gráfico da Regressão Linear do Pêndulo Físico

A razão J entre o momento de inércia e a massa:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi^2 J}{g} &= A\\ BJ &= A\\ J &= \frac{A}{B}\\ J &= \frac{0,051}{4,05}\\ J &= 0,0126\, m^2\end{aligned}$$

Para calcular o erro estatístico nessas duas grandezas, basta propagar o erro:

$$\begin{aligned}\delta g_{stat} &= \left(\frac{\delta B}{B}\right) g\\ \delta g_{stat} &= \left(\frac{0,05}{4,05}\right) 9,75\\ \delta g_{stat} &= 0,12\, m/s^2\end{aligned}$$

Analogamente para J:

$$\begin{aligned}\delta J_{stat} &= J\sqrt{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\delta B}{B}\right)^2}\\ \delta J_{stat} &= 0,0126\sqrt{\left(\frac{0,005}{0,051}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{4,05}\right)^2}\\ \delta J_{stat} &= 0,0012\, m^2\end{aligned}$$

Entretanto, ainda é necessário calcular os erros sistemáticos nas variáveis. Dado que nossa regressão possui dois graus de liberdade, é preciso realizar no mínimo duas medidas diferentes para poder calcular g e J. Trabalhando com a equação já linearizada:

$$T^2 a = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)a^2 + \frac{4\pi^2 J}{g}$$

$$\begin{cases} T_1^2 a_1 & = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)a_1^2 + \frac{4\pi^2 J}{g} \\ T_2^2 a_2 & = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)a_2^2 + \frac{4\pi^2 J}{g} \end{cases}$$

Isso é um sistema linear nas variáveis (g, J). Vamos rearranjar o sistema para isso ficar mais evidente:

$$\begin{cases} \left(\frac{T_1^2 a_1}{4\pi^2}\right)g - J & = a_1^2 \\ \left(\frac{T_2^2 a_2}{4\pi^2}\right)g - J & = a_2^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$$\begin{cases} g & = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)}{T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2} \\ J & = a_1 a_2 \left(\frac{T_2^2 a_1 - T_1^2 a_2}{T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2}\right) \end{cases}$$

Para encontrar o erro sistemático associado a essas variáveis, *basta calcular*

$$\begin{cases} \delta g_{sist} & = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial a_2}\delta a_2\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_1}\delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2}\delta T_2\right)^2} \\ \delta J_{sist} & = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial a_2}\delta a_2\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T_1}\delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T_2}\delta T_2\right)^2} \end{cases}$$

Com a condição de

$$\delta a_1 = \delta a_2 = 0,001\,m$$
$$\delta T_1 = \delta T_2 = 0,015\,s$$

A escolha mais racional para a_1, a_2, T_1 e T_2 é aquela que pega esses valores na extremidade do intervalo de medidas do experimento [2]. Voltando na tabela 2, temos:

$$a_1 = 0,020\,m$$
$$T_1 = 1,640\,s$$
$$a_2 = 0,160\,m$$
$$T_2 = 0,986\,s$$

Agora, é necessário colocar esses valores na equação para o erro sistemático. Dado o tamanho da equação, não iremos computá-la manualmente, mas sim usaremos um programa. Em *www.julianibus.de* é possível digitar uma função de N variáveis, associar valores numéricos e erros a elas, e o programa

[2] É importante ressaltar que não existe nenhuma teoria fechada para tratamento de erros sistemáticos. Outras escolhas de pares de variáveis seriam válidas também. Foi escolhido pegar os valores da extremidade do intervalo pois esses representam bem todo o intervalo trabalhado.

calcula numericamente o erro na função. Caso você deseje testar, pode digitar 4*pow(PI,2)*(pow(a_1,2)-pow(a_2,2))/(pow(T_1,2)*a_1-pow(T_2,2)*a_2) para calcular o erro sistemático em g e a_1*a_2*(pow(T_2,2)*a_1-pow(T_1,2)*a_2)/(pow(T_1,2)*a_1-pow(T_2,2)*a_2) para calcular o erro sistemático em J, lembrando de adicionar o valor das 4 variáveis e seus respectivos erros. Com isso,obtemos os valores para os erros sistemáticos:

$$\delta g_{sist} = 0,53\, m/s^2$$
$$\delta J_{sist} = 0,0012\, m^2$$

Dessa forma, podemos encontrar o erro total nas variáveis desejadas. Para isso, vamos somá-los em quadratura[3]:

$$\delta g = \sqrt{(\delta g_{stat})^2 + (\delta g_{sist})^2}$$
$$\delta g = \sqrt{(0,12)^2 + (0,53)^2}$$
$$\delta g = 0,538\, m/s^2$$
$$\delta g \approx 0,5\, m/s^2$$

Analogamente para J:

$$\delta J = \sqrt{(\delta J_{stat})^2 + (\delta J_{sist})^2}$$
$$\delta J = \sqrt{(0,0012)^2 + (0,0012)^2}$$
$$\delta J = 0,001697\, m^2$$
$$\delta J \approx 0,0017\, m^2$$

Finalmente, temos os valores para as variáveis desejadas.

$$\boxed{\begin{aligned} g_{exp} &= (9,8 \pm 0,5)\, m/s^2 \\ J_{exp} &= (0,0126 \pm 0,0017)\, m^2 \end{aligned}}$$

Item i)

Vamos comparar com os valores teóricos. Em São Paulo, onde fiz o experimento, a aceleração da gravidade $g_{teo} = 9,79\, m/s^2$. Portanto, a gravidade está dentro da margem de erro do valor experimental. Quanto à razão entre o momento de inércia e a massa, podemos calcular o valor teórico por meio da equação $J_{teo} = \frac{b^2+h^2}{12} = \frac{0,328^2+0,210^2}{12}$. Portanto, $J_{teo} = 0,01264\, m^2$, o que definitivamente está dentro da margem de erro experimental.

[3] Somamos em quadratura pois assume-se que os erros sistemáticos e estatísticos sejam independentes. Note que não há uma justificativa irrefutável para fazermos isso, é apenas uma escolha razoável.