

Gravitação Universal

Gabriel Lucena



1 Johannes Kepler



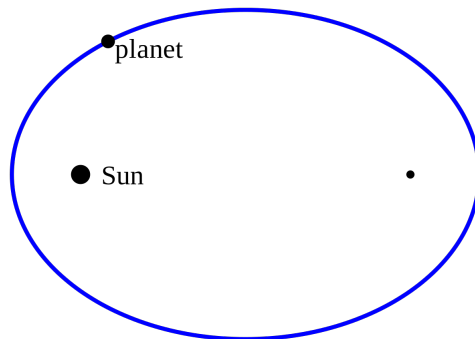
O alemão Johannes Kepler foi responsável pela determinação de três leis empíricas que governam o nosso sistema solar e, algum tempo depois, foi descoberto que essas leis funcionam em todo o Universo. Além disso, ele foi aprendiz do grande astrônomo Tycho Brahe que coletou muitas informações sobre as órbitas do planeta e, como aprendiz, o Kepler herdou todas essas informações que passou a estudar por muito tempo, até que encontrou algumas relações matemáticas que passamos a chamar de Leis de Kepler. É importante ressaltar que as leis desenvolvidas por Kepler possuíam apenas relações matemáticas, de modo que não explicava o porquê de funcionar assim, mas apenas explicava o como funcionava.

O que é uma lei empírica? As leis empíricas indicam padrões observados na natureza que se repetem e, até o momento proposto, não foi comprovada uma teoria que explique esses padrões.

O que é uma órbita? Uma órbita é a trajetória do caminho percorrido de um corpo, como a trajetória da Terra ao redor do Sol.

1.1 1ª Lei de Kepler (A lei das órbitas elípticas)

Essa lei indica que a órbita que os planetas do Sistema Solar percorrem são elipses.

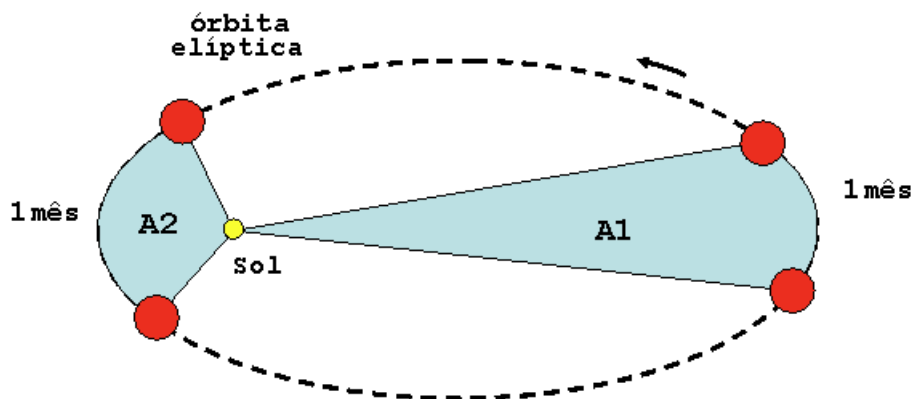


As elipses são figuras geométricas que possuem dois focos e lembram circunferências achatadas, como na imagem.

Observação: A circunferência é um caso especial da elipse, por isso que, dependendo de alguns parâmetros da elipse, consideramos a aproximação que a órbita da Terra, por exemplo, é uma circunferência.

1.2 2ª Lei de Kepler (A lei das áreas)

Essa lei indica que a linha que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.



Por trás do enunciado dessa lei, conseguimos uma relação matemática que indica que a velocidade areolar de um planeta é constante.

$$V_{areolar} = \frac{\Delta A}{\Delta T} = \text{constante} \quad (1)$$

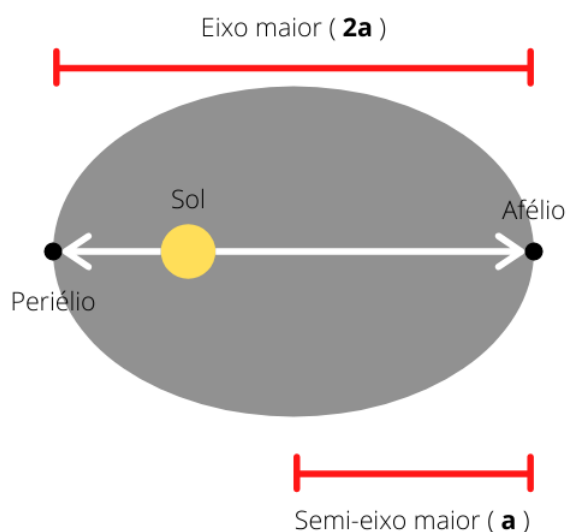
$$\frac{\Delta A_1}{\Delta T_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta T_2} \quad (2)$$

O que é a velocidade areolar? É a relação da área varrida pela linha que une o Sol ao planeta dividido pelo intervalo de tempo desse trajeto.

1.3 3ª Lei de Kepler (A lei harmônica ou lei dos períodos)

Essa lei indica a relação matemática que o semi-eixo maior da órbita elevado ao cubo dividido pelo período orbital ao quadrado é constante para o Sistema Solar.

$$\frac{a^3}{P^2} = \text{constante} \quad (3)$$



O que é o semi-eixo maior da órbita elíptica? O semi-eixo maior é metade da soma da distância do Sol ao periélio e do Sol ao afélio.

O que é o periélio e o afélio? O periélio é a menor distância da órbita ao Sol e o afélio é a maior distância da órbita ao Sol.

O que é o período orbital? É o intervalo de tempo para o planeta completar uma volta inteira na órbita.

Observação 1: O periélio e o afélio são características de órbitas que envolvem o Sol. No entanto, se pensarmos em órbitas que não envolvem o Sol, utilizamos os termos **perigeu** e **apogeu** que, na prática, indicam os mesmos pontos na órbita.

Observação 2: Nos próximos tópicos veremos que essa constante é **aproximadamente** igual para todas as órbitas do Sistema Solar, mas, rigorosamente, não são exatamente equivalentes.

Questão exemplo: O semi-eixo maior da órbita da Terra ao Sol equivale a 1 UA (Unidade Astronômica) e o período de translação do Sol é 1 ano. Dito isso, também sabemos que o período de translação de Marte equivale a aproximadamente 1.87 ano, qual o semi-eixo maior da órbita de Marte ao Sol?

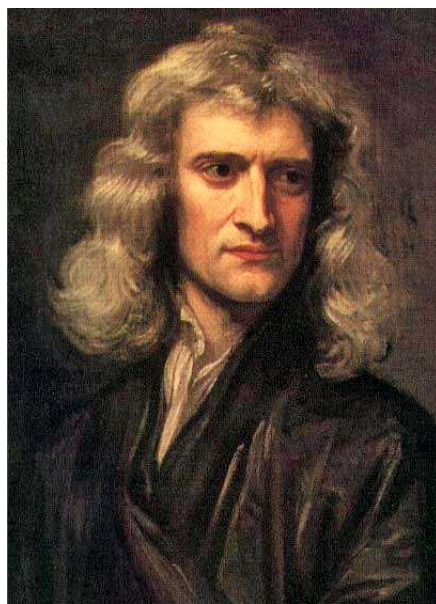
Resolução: Sabemos que, pela terceira lei de Kepler, a razão do cubo do semi-eixo maior e do quadrado do período de translação é **aproximadamente** constante para o sistema solar, então:

$$\frac{a_{Terra}^3}{P_{Terra}^2} = \frac{a_{Marte}^3}{P_{Marte}^2} \quad (4)$$

$$\frac{(1UA)^3}{(1ano)^2} = \frac{a_{Marte}^3}{(1.87ano)^2} \quad (5)$$

$$a_{Marte} = 1.52UA \quad (6)$$

2 Isaac Newton



O cientista Isaac Newton é considerado o pai da mecânica clássica. Esse título não é à toa, seus grandes feitos foram elaborar as três principais leis que fundamentam a física clássica, a gravitação universal e muitos outros trabalhos em outras áreas da física e da matemática.

2.1 1ª Lei de Newton (A lei da inércia)

Um corpo qualquer continuará em estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme desde que nenhuma força externa aja sobre esse corpo. Essa lei está relacionada com a conservação de uma grandeza chamada **Momentum Linear**.

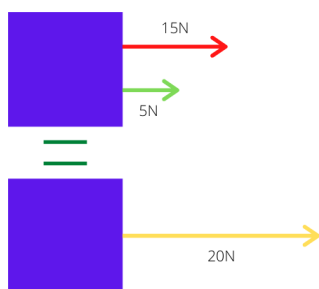
2.2 2ª Lei de Newton (A lei da superposição de forças)

Essa lei indica que a superposição, ou seja, a soma de todas as forças externas sobre um determinado corpo é proporcional ao produto de sua massa e sua aceleração.

$$\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}_{resultante} \quad (7)$$

Observação: Essa soma deve considerar o espaço em três dimensões, não apenas uma. Para simplificar, utilizaremos uma seta em cima das variáveis para indicar que estamos considerando todas as 3 dimensões do espaço.

Exemplo: Sobre um corpo de 5 kg existem duas forças de intensidades 5N e 15N no mesmo sentido e na mesma direção, nesse caso, a força resultante será $5N+15N = 20N$ e a aceleração resultante desse corpo será $\frac{\vec{F}_{res}}{m} = \frac{20N}{5kg} = 4m/s^2$



2.3 3ª Lei de Newton (Lei da ação e reação)

A toda ação sempre tem uma reação de mesma intensidade e direção, porém sentidos opostos.

Exemplo: Se você empurra uma parede com força \vec{F} , a parede reagirá e te empurrará com força $(-\vec{F})$.

3 Gravitação Universal

A gravitação é um fenômeno universal que explica como ocorre a atração entre corpos com massas. O que isso significa? Nesse momento, a Terra está nos atraindo com sua massa e o Sol está atraindo a Terra. Mas essa atração não ocorre apenas com esses corpos de muita massa, ela também está ocorrendo nesse exato momento entre eu, escritor desse módulo, e você, leitor. Esse é um fenômeno estranho, o que eu acabo de dizer, não parece real, pois, provavelmente, você não se sente atraído gravitacionalmente por mim. Isso é fato, nós não percebemos essa atração gravitacional entre nós, pois nossas massas são muito pequenas para que essa força entre nós seja significativa.

3.1 Força gravitacional

Isaac Newton se propôs a estudar esse peculiar fenômeno fazendo diversas observações e anotações. Após muita análise, concluiu que essa força gravitacional diminui com o quadrado da distância entre os corpos e que a mesma força depende das duas massas que estão interagindo. Com isso, chegou à seguinte fórmula:

$$\vec{F}_{gravitacional} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad (8)$$

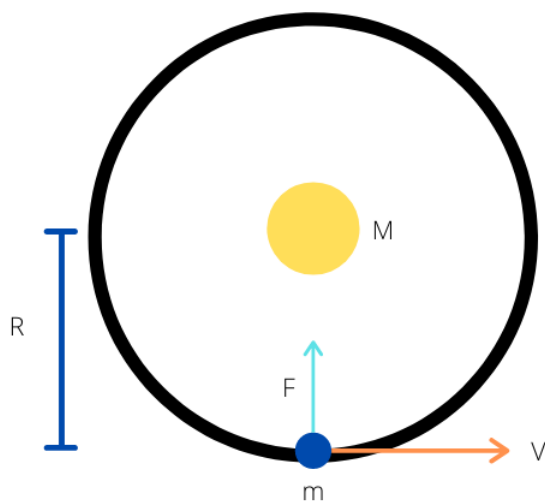
De modo que G é a **constante gravitacional** e possui valor $6.67 \frac{Nm^2}{kg^2}$

3.2 Energia Potencial Gravitacional

A energia potencial gravitacional é a energia associada à atração gravitacional de dois corpos. Curiosamente, essa energia é, nesse referencial, negativa. Eu concordo que isso é muito estranho! Mas o fato dela ser negativa é apenas uma condição do referencial que, para distâncias muito grandes, essa energia potencial tenderá à zero e, quanto menor a distância, maior o valor absoluto dessa energia potencial.

$$U_{gravitacional} = -\frac{Gm_1m_2}{d} \quad (9)$$

4 Movimento Circular Uniforme (MCU)



- **M** e **m** são as massas dos objetos amarelo e azul
- **R** é a distância entre os objetos
- **V** é a velocidade do objeto azul nessa órbita.
- **F** é a força central desse movimento

O movimento circular e uniforme é caracterizado por uma força central que muda a direção do movimento de um corpo, mas a intensidade da velocidade permanece constante em todo o movimento.

4.1 Força centrípeta

A força centrípeta é a componente da **força resultante** que é perpendicular ao movimento. Para simplificar, no movimento circular e uniforme, a **força centrípeta é igual à força resultante**.

$$F_{centripeta} = \frac{mV^2}{R} \quad (10)$$

4.2 Velocidade orbital

A velocidade orbital é, simplesmente, a velocidade do corpo em sua órbita. Nesse caso, podemos facilmente calcular essa velocidade. Para isso, usaremos conceitos apresentados acima:

Na figura acima, vemos que o **corpo azul** interage gravitacionalmente com o **corpo amarelo**, como não há outra força além dessa gravitacional, podemos aplicar a segunda lei de Newton e concluímos que a força resultante no **corpo azul** é igual à força gravitacional:

$$F_{resultante} = F_{gravitacional} \quad (11)$$

Dito isso, nós também sabemos que, no caso do movimento circular uniforme, a força centrípeta é igual à força resultante, então:

$$F_{centripeta} = F_{resultante} \quad (12)$$

Com as equações (10) e (11), podemos encontrar que a força centrípeta é igual à força gravitacional:

$$F_{centripeta} = F_{gravitacional} \quad (13)$$

Com isso, nós vamos substituir a relação acima pelas fórmulas que já conhecemos:

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad (14)$$

Nós podemos dividir ambos os lados por $\frac{m}{R}$:

$$V^2 = \frac{GM}{R} \quad (15)$$

Com isso, vamos isolar a velocidade e encontraremos a **velocidade orbital**:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (16)$$

4.3 Velocidade de escape

A velocidade de escape é a velocidade necessária para um objeto escapar gravitacionalmente e chegar no infinito com velocidade nula. Dito isso, vamos observar que, como queremos que a velocidade escape seja suficiente para escapar gravitacionalmente, podemos dizer que, em módulo, a energia cinética e a energia potencial gravitacional são iguais:

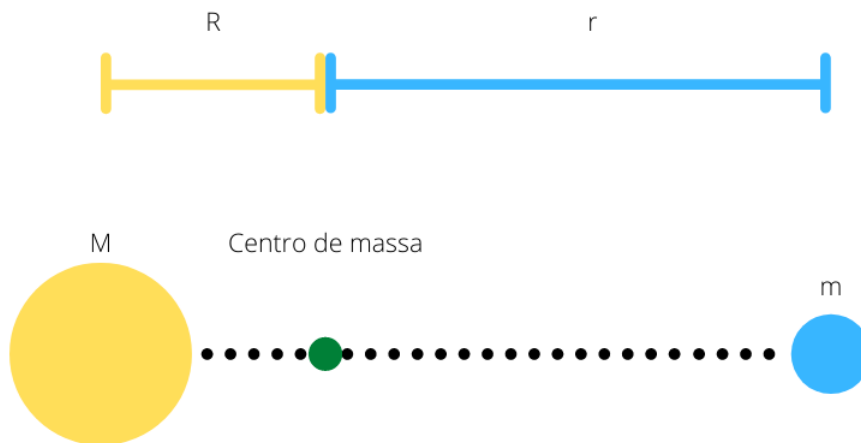
$$\frac{mV_{escape}^2}{2} = \frac{GMm}{R} \quad (17)$$

$$V_{escape}^2 = \frac{2GM}{R} \quad (18)$$

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (19)$$

Como vimos acima, a velocidade de escape é $\sqrt{2}$ vezes maior que a velocidade orbital.

5 Centro de Massa



5.1 O que é o centro de massa?

O centro de massa é um referencial inercial que podemos observar enquanto o centro de massa está parado, os corpos interagindo gravitacionalmente e se movendo ao redor desse centro.

5.2 Quais as propriedades do centro de massa?

A propriedade mais importante do centro de massa é o que chamaremos de balanço gravitacional. Vamos definir que a distância entre o corpo amarelo e o corpo azul seja d . Então, vamos definir R a distância do corpo amarelo ao centro de massa e r a distância do corpo azul ao centro de massa. Dito isso, essas distâncias vão obedecer essa fórmula:

$$d = R + r \quad (20)$$

$$M \cdot R = m \cdot r \quad (21)$$

É fácil observar que, quanto maior a massa de um corpo, menor é sua distância. E, da mesma forma, quanto menor a massa de um corpo, maior é sua distância.

Exemplo: Vamos calcular a distância do Sol ao centro de massa do sistema Terra-Sol. Os dados que utilizaremos são $M_{Sol} = 1.99 \cdot 10^{30}kg$, $M_{Terra} = 5.972 \cdot 10^{24}kg$, $d_{Terra-Sol} = 1.5 \cdot 10^8km$, vamos isolar a distância r usando as fórmulas anteriores e igualar eles para encontrarmos R em função apenas das massas:

$$\begin{aligned} d &= R + r \Rightarrow r = d - R \\ M \cdot R &= m \cdot r \Rightarrow r = \frac{M}{m}R \\ d - R &= \frac{M}{m} \cdot R \Rightarrow R = \frac{m}{M + m}d = 450km \end{aligned}$$

Note que esse valor de $450km$ é inferior ao Raio do Sol ($R_{Sol} = 695500km$), ou seja, a massa do Sol é tão grande que o centro de massa é muito próximo do centro do Sol.

6 Exemplos

6.1 Satélites

Os satélites são corpos que gravitam em órbitas de planetas. Nesse sentido, nós sabemos que a **Lua** é um **satélite natural** da Terra, mas também existem **satélites artificiais**, como os responsáveis pelo sistema de posicionamento global (GPS).

6.2 Planetas e Luas

Da mesma forma que os satélites, os planetas orbitam um corpo maior, nesse caso, os planetas orbitam estrelas. E a nossa lua não é a única. As luas, de forma geral, orbitam planetas. O planeta Marte possui duas Luas, Phobos e Deimos, e Júpiter possui, atualmente confirmadas, 79 luas que, entre elas, estão Io, Europa, Ganimedes e Calisto, as famosas luas galileianas.

7 Observações finais

O objetivo desse módulo é introduzi-los à gravidade universal, assunto muito importante para a astronomia, astrofísica e astronáutica. Porém devemos entender que nenhum estudo é independente e depende de estudos prévios, então tentei simplificar algumas ideias importantes para o entendimento da gravitação. Dito isso, espero que tenha ajudado e recomendo que, com o tempo, aprimore suas habilidades em todos os tópicos abordados aqui.

"Para compreender a fundo uma só coisa, seria preciso compreendê-las todas"

- Cláudio Bernard

Bons estudos e foco :)