

P2 - Campeonato de Física

Primeiramente, neste Problema usaremos que em um oscilador Harmônico Quântico 2D os níveis de energia permitidos são $E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ e em um 3D são $E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$ onde $n_x, n_y, n_z \in \{0, 1, \dots\}$.

Também usaremos que a ocupação do nível de energia $|i\rangle$ com energia E_i é dada por $f(E_i) = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}$, onde $\beta \equiv \frac{1}{kT}$ e μ é o

potencial químico.

A partir dessas definições, temos a simples relação:

$$N = \sum_i n_i = \sum_{E_i} f(E_i) g_i, \text{ onde } n_i \text{ é a ocupação}$$

do estado i , e g_i a degeneridade do estado com energia E_i . Queremos transformar esta soma acima em uma integral. Isso requer que os níveis de energia sejam muito menores que a

energia kT . Note que isso de fato ocorre já que $\hbar\omega \ll kT$. Dessa forma, temos que $N = \sum f(E_i) g_i = \int_0^\infty f(E) g(E) dE$, onde $g(E)$ é agora a densidade de estados por unidade de energia.

Vamos agora achar $g_i(E)$ para o oscilador 2D e 3D. Para o oscilador 2D isto é $g_i(E) = \frac{E'}{\hbar^2 \omega^2}$ e para o 3D)

$$e^{-\beta \epsilon} g_i(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega^3}. \text{ Agora, vamos calcular a}$$

Soma $N = \sum_{\epsilon_i} \beta \epsilon_i g_i$. Primeira vamos retirar a população do estado menos excitado $N_0 = \beta(\epsilon_0) g_0$, de modo

que
$$N = \sum_{\epsilon_i} \beta \epsilon_i g_i = \underbrace{\beta(\epsilon_0) g_0}_{N_0} + \sum_{\epsilon_i > \epsilon_0} \beta \epsilon_i g_i. \text{ Como}$$

para o oscilador 2D $\epsilon_0 = \hbar \omega$ e p/ o 3D $\epsilon_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega$

temos
$$N_0^{2D} = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega - \mu)} - 1} \text{ e } N_0^{3D} = \frac{1}{e^{\beta(\frac{3}{2}\hbar\omega - \mu)} - 1}. \text{ Note}$$

que o estado de menor energia não tem degenericidade, $g_0 = 1$. Assim, transformando a soma em uma integral temos:

$$N = N_0 + \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} g_i(\epsilon) d\epsilon.$$

Começemos com o caso 2D:

$$N = N_0 + \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

Definindo $x \equiv \beta \epsilon$ temos agora:

$$dx = \beta d\epsilon \Rightarrow N = N_0 + \frac{1}{h^2 \omega^2} \int_{\beta \epsilon_0}^{\infty} \frac{x/\beta}{e^{x-\beta\mu} - 1} \frac{dx}{\beta}, \text{ assim:}$$

$$N - N_0 = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2} \int_{\beta \epsilon_0}^{\infty} \frac{x}{e^{x-\beta\mu} - 1} dx. \text{ Agora, lembrando que } \beta \epsilon_0 = \frac{h\omega}{kT} \ll 1$$

~~temos que~~ $N - N_0 = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2}$. Agora, analisando a expressão para

$$N_0 = \frac{1}{\beta (\frac{h\omega}{2} - \mu)} e^{-\beta(\frac{h\omega}{2} - \mu)}, \text{ note que para máxima ocupação deste estado}$$

Fenômeno desejado

precisamos que o potencial químico $\mu \rightarrow h\omega = \epsilon_0$. Usando isso na nossa equação para $N - N_0$ temos:

$$N - N_0 = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2} \int_{\beta \epsilon_0}^{\infty} \frac{x}{e^{x-\beta\epsilon_0} - 1} dx, \text{ com } u \equiv x - \beta\epsilon_0 \text{ temos:}$$

$$N - N_0 = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2} \int_0^{\infty} \frac{u + \beta\epsilon_0}{e^u - 1} du = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{u}{e^u - 1} du + \beta\epsilon_0 \int_0^{\infty} \frac{du}{e^u - 1} \right]$$

Para a primeira integral temos $\int_0^{\infty} \frac{u du}{e^u - 1} = \frac{\pi^2}{6}$ e a segunda

~~temos~~ ignoramos já que $\beta\epsilon_0 \ll 1$. Assim, temos que:

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{k^2 T^2}{h^2 \omega^2 \beta^2} \frac{\pi^2}{6N} = \left(\frac{k\pi T}{h\omega \sqrt{6N}} \right)^2 = \left(\frac{T}{T_c} \right)^2, \text{ onde } T_c = \frac{h\omega \sqrt{6N}}{k\pi}$$

Note que T_c é a temperatura crítica que causa $N \gg N_0$.

Agora, repetimos a análise para 3D. Assim, temos que:

$$N = N_0 + \frac{1}{2h^3 \omega^3} \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon. \text{ Neste}$$

caso, precisamos que $\mu \rightarrow \frac{3h\omega}{2} = \epsilon_0$ p/ máxima ocupação do estado de menor energia. Definindo agora $\epsilon - \mu = \epsilon - \epsilon_0 \equiv u$ temos:

$$N - N_0 = \frac{1}{2h^3 \omega^3} \int_0^{\infty} \frac{(u + \epsilon_0)^2}{e^{\beta u} - 1} du, \text{ e fazendo assim}$$

$$N - N_0 = \frac{1}{2h^3 \omega^3} \left[\int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{e^{\beta u} - 1} + 2\epsilon_0 \int_0^{\infty} \frac{u}{e^{\beta u} - 1} du + \epsilon_0^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\beta u} - 1} du \right]$$

Com $z \equiv \beta u$:

$$N - N_0 = \frac{1}{2h^3 \omega^3} \left[\int_0^{\infty} \frac{\frac{z^2}{\beta^2} \frac{dz}{\beta}}{e^z - 1} + \frac{2\epsilon_0}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{z}{e^z - 1} dz + \frac{\epsilon_0^2}{\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^z - 1} dz \right]$$

$$N - N_0 = \frac{1}{2h^3 \omega^3 \beta^3} \left[\int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{e^z - 1} + 2\epsilon_0 \beta \int_0^{\infty} \frac{z dz}{e^z - 1} + \epsilon_0^2 \beta^2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} \right]$$

Agora, desprezamos as duas últimas integrais já que eles tem fatores $\epsilon_0 \beta$ e $(\epsilon_0 \beta)^2$ que ~~podem~~ assumimos $\ll 1$.

Assim, $N - N_0 = \frac{1}{2h^3 \omega^3 \beta^3} \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^z - 1} = \frac{1}{2h^3 \omega^3 \beta^3} \cdot 2 \zeta(3) = \frac{\zeta(3)}{h^3 \omega^3 \beta^3}$, onde

$\zeta(3) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^3}$. Assim $\frac{N - N_0}{N} = \frac{K^3 T^3}{h^3 \omega^3 N} \zeta(3) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$, onde

$T_c = \frac{h\omega}{K} N^{1/3}$. Note que T_c é a temperatura causando $N \gg N_0$

Assim $T_c^{2D} = \frac{h\omega}{K} \frac{\sqrt{6N}}{\pi}$ e $T_c^{3D} = \frac{h\omega}{K} \frac{N^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}}$

de modo que $T_c^{3D} - T_c^{2D} = \frac{h\omega}{K} \left(\frac{N^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}} - \frac{\sqrt{6N}}{\pi} \right)$

Para analisar em qual caso o condensado se forma mais rápido, note que para o caso 2D $\frac{N - N_0}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2$ e para o 3D $\frac{N - N_0}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$

de modo que $\left\{ \begin{array}{l} 2D \Rightarrow N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \right) \\ 3D \Rightarrow N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \right) \end{array} \right.$

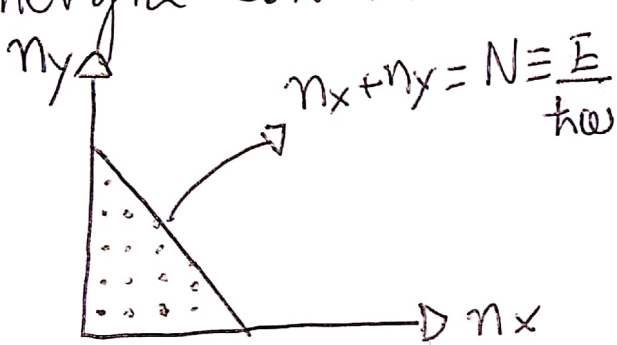
Assim, a medida que T diminui mais que T_c vemos que o condensado 3D se formará mais rapidamente devido ao fator ao cubo de $\frac{T}{T_c}$.

Apendice:

Prova da densidade de estados de um oscilador harmônico quântico. Por generalidade vamos provar a densidade de estados em um caso 2D e depois generalizar para dimensões arbitrárias.

Além disso, iremos ignorar a energia do estado menos energético do oscilador - definindo $E_0 = 0$ - por efeitos de simplicidade.

Assim para o oscilador 2D temos que $E_{n_x, n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y)$. Considere agora o espaço de n_x, n_y possíveis como um plano cartesiano e considere desenhar neste plano a reta representando energia constante como abaixo:



Neste gráfico, temos que cada retângulo de área 1 representa um estado de modo que temos aprox. $\frac{N^2}{2}$ estados com energia \leq a E .

Assim, considere uma pequena variação em N . Através da relação da energia, sabemos que $dE = \hbar\omega dN$. Além disso, variando N com um dN teremos um adicional dK estados onde $dK = NdN$ - obtido por diferenciando ~~o~~ ~~o~~ número total de estados $N^2/2$. Assim, $dN = \frac{dK}{N}$ e dessa forma $dE = \frac{\hbar\omega}{N} dK$ e a densidade de estados

por unidade de energia $\frac{dK}{dE} \equiv g(E) = \frac{N}{\hbar\omega} = \frac{E}{\hbar^2\omega^2}$ que é o

resultado usado na parte 1.

Agora, vamos generalizar para d -dimensões.
 Para um oscilador harmônico d -dimensional temos que as energias permitidas são

$$E = \hbar\omega \sum_{i=1}^d n_i - \text{Note que adotamos } E_0 = 0$$

Novamente considerando um plano cartesiano d -dimensional temos agora uma superfície $d-1$ dimensional representando energia constante, da forma $\sum_{i=1}^d n_i = \frac{E}{\hbar\omega} \equiv N$. Essa superfície tem volume

dado por $V = \frac{N^d}{d!}$. Isso é facilmente provável pela integral $V = \int dV = \int_0^N \int_0^{N-x_1} \int_0^{N-x_1-x_2} \dots \int_0^{N-x_1-x_2-\dots-x_{d-1}} dx_1 dx_2 \dots dx_d$

e provando por indução. Como neste caso um volume d -dimensional de valor 1 representa 1 estado, temos $N^d/d!$ estados com energia $\leq E$. Variando N , temos que $dE = \hbar\omega dN$ e $dK = \frac{N^{d-1}}{(d-1)!} dN$ de modo que

a densidade de estados é $\frac{dK}{dE} = \frac{N^{d-1}}{\hbar\omega(d-1)!} = \frac{E^{d-1}}{(\hbar\omega)^d (d-1)!}$

Note que na resolução usamos $d=3$ com uma densidade de estados $g(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}$. Isso conclui nossa prova.

Prova dos níveis de energia de um oscilador Harmônico:

Agora, provaremos que para um oscilador harmônico d-dimensional as energias permitidas são $E = \hbar\omega \left(\sum_{i=1}^d \left[n_i + \frac{1}{2} \right] \right)$. Para isso, basta provar

o caso 1D já que o caso d dimensional é apenas a soma de todos. Podemos prosseguir de varias formas agora onde todas começam pela equação de Schrodinger do sistema 1D:

$$\hat{H} = \cancel{\frac{\hat{p}^2}{2m}} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \Rightarrow \hat{H}\phi = E\phi = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right] \phi$$

Agora escolhemos continuar e achar os valores possíveis de E através de um método elegante definindo os operadores famosos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right] \\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right] \end{array} \right.$

Observe que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\left[\hat{x}, -\frac{i\hat{p}}{m\omega} \right] + \left[\frac{i\hat{p}}{m\omega}, \hat{x} \right] \right]$. Como $[x, p] = i\hbar$

$$\text{temos } [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\frac{-i}{m\omega} \cdot i\hbar + \frac{i}{m\omega} (-i\hbar) \right] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\frac{2\hbar}{m\omega} \right] = 1. \text{ Dessa}$$

forma $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$. Note que ^{para} essa Hamiltoniana ~~deve ser~~ ~~no~~

qualquer estado - não necessariamente um autovetor da Hamiltoniana - terá energia no mínimo $\frac{\hbar\omega}{2}$. Isso é evidente já que considerando um estado

$$|\phi\rangle, \text{ temos } \langle \hat{H} \rangle = \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle = \hbar\omega \left[\underbrace{\langle \phi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \phi \rangle}_{\geq 0} + \langle \phi | \frac{1}{2} | \phi \rangle \right] = \hbar\omega \left[\underbrace{|\langle \hat{a} \phi \rangle|^2}_{\geq 0} + \frac{1}{2} \right]$$

$\geq \frac{\hbar\omega}{2}$. Onde essa igualdade é saturada apenas se $\hat{a}|\phi\rangle = 0$.

Logo, ~~o~~ o estado de menor energia deveria ter energia no mínimo $\frac{\hbar\omega}{2}$. Agora vamos verificar se de fato existe um estado onde $\hat{a}|\phi\rangle=0$. Note que se existir esse estado é o estado de menor energia.

Assim, considerando $|\phi\rangle$ na sua representação $\phi(x)$:

$$\hat{a}\phi(x)=0 \Rightarrow \left[\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right] \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x\phi + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\phi \Leftrightarrow \phi(x) = A \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right].$$

Como essa ~~estado~~ função é claramente normalizável em $x \rightarrow -\infty$ a ∞ , temos que é um estado válido e de fato é o estado de menor energia. Denominemos este estado $|\phi\rangle$ como $|0\rangle$. Agora, considere um autovetor de \hat{H} $|k\rangle$ com energia E . Iremos produzir um estado $|k'\rangle$ com energia $E+\hbar\omega$ que também é um autovetor de \hat{H} . Note que isso implicaria que os níveis de energia a partir de 0 são $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Vamos considerar a definição $|k'\rangle = a^\dagger|k\rangle$ de modo que

$$\hat{H}|k'\rangle = \hbar\omega \left[a^\dagger a a^\dagger|k\rangle + \frac{E}{2}|k\rangle \right], \quad H = [a, a^\dagger] = a a^\dagger - a^\dagger a$$

$$\Rightarrow a a^\dagger = 1 + a^\dagger a \quad \text{assim} \quad \hat{H}|k'\rangle = \hbar\omega \left[\overbrace{a^\dagger|k\rangle}^{E} + \overbrace{a^\dagger a|k\rangle}^{E-\frac{\hbar\omega}{2}} + |k\rangle \right]$$

$$\Rightarrow \hat{H}|k'\rangle = \hbar\omega \left[|k\rangle + \frac{E}{\hbar\omega}|k\rangle - \frac{|k\rangle}{2} + \frac{|k\rangle}{2} \right] = (E+\hbar\omega)|k'\rangle$$

Ou seja, o estado construído $|k\rangle$ também é um auto vetor de \hat{H} mas com energia $E + \hbar\omega$. Isso implica que os níveis de energia são constantemente espaçados por energia $\hbar\omega$. Logo os níveis de energia são da forma $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ para o estado $|n\rangle$.

Obs: tecnicamente teríamos que provar que $|k\rangle$ também é normalizável, mas isso é evidente pois $\langle k|k\rangle = \langle k|a^\dagger|k\rangle$.

Prova da distribuição de Bose-Einstein:

Considere que temos um número de níveis de energia cada um com energia E_i . Assuma que cada nível possui degeneracidade g_i . Como Bósons podem ocupar em qualquer número o mesmo estado, vamos calcular o número Ω de ocupações ~~nas~~ distintas assumindo que estamos distribuindo n_i partículas em uma mesma nível de energia E_i com degeneracidade g_i . Trivialmente isto

$$\text{é } \Omega_{n_i, g_i} = \frac{(g_i - 1 + n_i)!}{(g_i - 1)! n_i!} \approx \frac{(n_i + g_i)!}{g_i! n_i!} \quad \text{onde assumimos } n_i \gg 1 \text{ e } g_i \gg 1.$$

Assim, o número total ~~que~~ de microestados do sistema é apenas

$$\Omega = \prod_i \Omega_{n_i, g_i} \approx \prod_i \frac{(n_i + g_i)!}{g_i! n_i!}$$

Gostaríamos agora de maximizar Ω , já que o sistema tenderá ao equilíbrio com $\ln \Omega$ máximo ou seja Ω máxima

No entanto, observe que precisamos manter as restrições que o número total de partículas é fixo $N = \sum_i n_i$, e que a energia total também é

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i.$$

Para isso usamos o método de multiplicadores de Lagrange afim de maximizar $\ln \Omega$. Observe que $\ln \Omega = \ln \left[\prod_i \frac{(n_i + g_i)!}{(g_i - 1)! n_i!} \right]$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega = \sum_i \ln \frac{(n_i + g_i)!}{(g_i - 1)! n_i!} = \sum_i \left[(n_i + g_i) \ln(n_i + g_i) - n_i \ln n_i - g_i \ln g_i + \text{constantes} \right]$$

Note que por conveniência ignoramos fatores constantes em n_i .

Assim, $\ln \Omega = \sum_i (n_i + g_i) \ln(n_i + g_i) - n_i \ln n_i$. Dessa

forma a maximização é:

Maxime $M(n_i) = \sum_i (n_i + g_i) \ln(n_i + g_i) - n_i \ln n_i$ com

$F_1(n_i) = \sum_i n_i - N = 0$ e $F_2(n_i) = \sum_i n_i \epsilon_i - E = 0$.

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange para os multiplicadores λ_1 e λ_2 temos:

$$\frac{\partial M}{\partial n_i} = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial n_i}, \quad F_1(n_i) = 0, F_2(n_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial n_i} = \ln \left(\frac{n_i + g_i}{n_i} \right) = \lambda_1 + \lambda_2 \epsilon_i, \quad \text{Assim temos que}$$

$$1 + \frac{g_i}{n_i} = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 \epsilon_i) \Rightarrow n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 \epsilon_i} - 1} \quad \text{Partindo}$$

também agora que $dM = \lambda_1 dN + \lambda_2 dE$ pode se reconhecer a Segunda lei da termodinâmica com $dV = 0$ de modo que $\lambda_2 = \beta$ e $\lambda_1 = -\beta \mu$. Assim $n_i = \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$ que é a expressão utilizada.

Parte 2

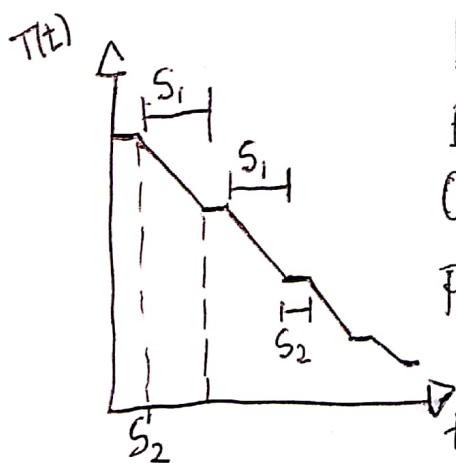
Primeiro observe que caso uma partícula tenha energia $\gg E$ ela simplesmente escaparia do potencial. Dessa forma, podemos concluir que o mecanismo responsável pelo decaimento da temperatura é um processo de 2 etapas detalhado abaixo:

1- Todas as partículas com energia $E \gg E$ escapam do gás restando apenas partículas com energia $\leq E$. Essa etapa leva tempo τ_{esc} , e a temperatura nessa etapa é aproximadamente constante.

2- O gás termaliza a uma nova temperatura $\bar{T} < T$ querendo obedecer a distribuição de Bose einstein. Essa etapa leva tempo τ_{ter} . Após isso a etapa 1 se repete.

A partir disso temos o seguinte gráfico para $T(t)$ usando que $\tau_{esc} = S_2$

$$\tau_{ter} = S_1 \text{ e } S_1 \gg S_2$$



Note que o eixo y não foi representado em escala. É essencial notar o aspecto "escada" do gráfico. Observe que nesse modelo a temperatura $T(t)$ pode descer até que $\langle E(T_{ob}) \rangle = h\nu/2$ Ou seja, a temperatura $T_{ob} = T(t)$ descerá até que a energia média do gás $\langle E(T_{ob}) \rangle$ por partícula é igual a

energia de repouso.

Alem disso percebeu que a duração do ciclo é $\tau_{esc} + \tau_{ter} \approx \tau_{ter}$.

Agora, vamos usar este modelo para calcular $T(T)$.
 Para isso, note que a energia que permanece no sistema após todas as partículas com energia $> E$ escaparem

é:

$$E_{TOT} = \int_0^E \rho(E) g(E) E dE = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^E \frac{E^2 dE}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

Como a $T \rightarrow T_c$, $\mu \rightarrow 0$ temos que:

$$E_{TOT} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^E \frac{E^2 dE}{e^{\beta E} - 1}. \text{ Agora, note que}$$

essa integral é feita no espaço de 0 a E e como $\beta E \ll 1$ podemos expandir a exponencial no denominador tal que:

$$E_{TOT} \approx \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^E \frac{E^2 dE}{\beta E} = \frac{kT}{\hbar^2 \omega^2} \frac{E^2}{2}$$

Agora, isso conclui a etapa 1. Na etapa 2, o gás se thermaliza, atingindo uma nova temperatura T' de modo que a energia total se mantém. Após thermalização a energia do sistema é dada por:

$$E_{TOT} = \int_0^{\infty} \rho(E) g(E) E dE = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^{\infty} \frac{E^2 dE}{e^{E/(kT')} - 1}$$

E assim: $E_{rot} = \frac{1}{h^2 \omega^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} = \frac{1}{h^2 \omega^2} \cdot 2(kT)^3 \zeta(3)$

Dessa forma, $\frac{kT}{h^2 \omega^2} \frac{E^2}{2} = \frac{2}{h^2 \omega^2} (kT)^3 \zeta(3) \Rightarrow (kT)^3 = \frac{E^2}{4 \zeta(3)} kT$

Assim $T^3 = \frac{T}{4 \zeta(3)} \left(\frac{E}{k} \right)^2 \Rightarrow T = \left(\frac{E^2 T}{4 \zeta(3) k} \right)^{1/3} \left(\frac{E}{k} \right)^{2/3}$. Como foi dado

que $\frac{E}{kT} \ll 1$, note que $T = \left(\frac{E^2 T}{k^2 T^2} \right)^{1/3} \frac{1}{(4 \zeta(3))^{1/3}} = T \left(\frac{E}{kT} \right)^{2/3} \frac{1}{(4 \zeta(3))^{1/3}}$

$\Rightarrow \frac{T}{T} = \left(\frac{E}{kT} \right)^{2/3} \frac{1}{(4 \zeta(3))^{1/3}}$, ou seja, $\frac{T}{T} \rightarrow 0$ já que $\left(\frac{E}{kT} \right)^{2/3} \ll 1$.

Isso implica que a cada ~~etapa~~ repetição do ciclo de perda de temperatura a variação de temperatura é $\Delta T = T - T = T \left(\left(\frac{E}{kT} \right)^{2/3} \frac{1}{(4 \zeta(3))^{1/3}} - 1 \right)$

Assim $\Delta T \approx -T$. Ou seja, a cada ~~etapa~~ ciclo a variação é quase $-T$. Transformando esse processo discreto em contínuo, temos que:

$\Delta T \approx \dot{T} \tau_{ter} \approx -T \Rightarrow \dot{T} = -\frac{T}{\tau_{ter}} \Rightarrow T(t) = T_c \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ter}}\right)$

Lembre que $\tau_{ter} \gg \tau_{esc}$. Além disso observe que assumimos que cada ciclo tem duração constante $\tau_{ter} + \tau_{esc} \approx \tau_{ter}$. Estimar τ_{ter} com função dos parâmetros do sistema é mais difícil, especialmente ^{pois} que τ_{ter}

é relacionado com a thermalização do sistema que é intimamente ligada com a taxa de colisões do sistema. No entanto, não possuímos dados para estimar essa taxa - idealmente gostaríamos de usar o valor da seção de área das partículas. Porém, por argumentos de análise dimensional

Sabemos que $\tau_{\text{ter}} \sim \frac{1}{\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{E} \right)^d$, onde d é uma constante. ~~de ordem 1~~

Para ser concreto, podemos também afirmar que $\tau_{\text{ter}} \gtrsim \frac{1}{\omega}$ já que o gás vai levar mais de um período de oscilação para thermalizar.