Problemas Temáticos: Físicos

Departamento de Física

<u>Einstein</u> *

Albert Einstein, um dos físicos mais renomados da história, revolucionou nosso entendimento do mundo ao introduzir a teoria da relatividade. Nascido em 1879 na Alemanha, Einstein ganhou destaque por suas contribuições em diversas áreas da física teórica, sendo agraciado com o Prêmio Nobel de Física em 1921.

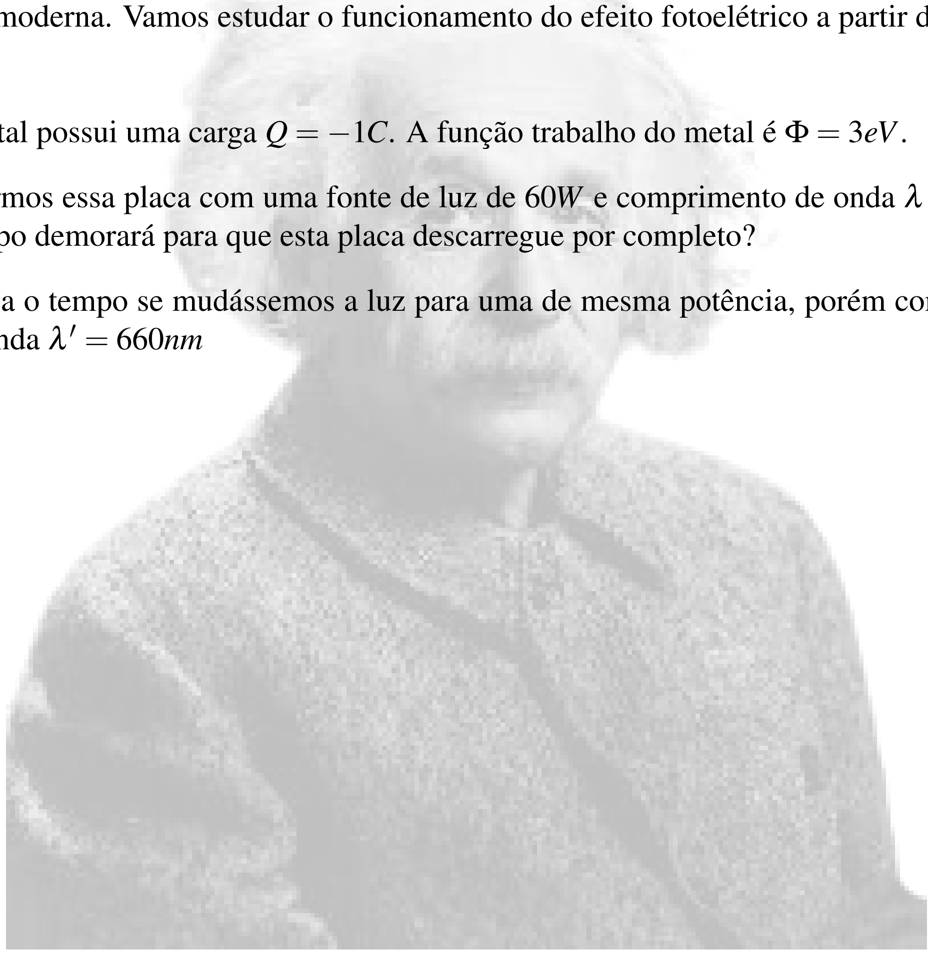
No entanto, uma das suas descobertas mais impactantes foi o **efeito fotoelétrico**, que pavimentou o caminho para o desenvolvimento da física quântica. O efeito fotoelétrico descreve a emissão de elétrons por um material quando exposto à luz. Einstein formulou a teoria quântica da luz, explicando que a luz é composta por partículas discretas de energia, chamadas fótons.

Com base em sua teoria, Einstein demonstrou que **a energia dos fótons incidentes sobre um material é transferida diretamente aos elétrons, permitindo que eles sejam ejetados**. Essa descoberta foi fundamental para a compreensão da natureza corpuscular da luz e estabeleceu as bases para a teoria quântica moderna. Vamos estudar o funcionamento do efeito fotoelétrico a partir da seguinte situação:

Uma placa de metal possui uma carga $Q = -1C$. A função trabalho do metal é $\Phi = 3eV$.

(a) Se iluminarmos essa placa com uma fonte de luz de $60W$ e comprimento de onda $\lambda = 330nm$, quanto tempo demorará para que esta placa descarregue por completo?

(b) Quanto seria o tempo se mudássemos a luz para uma de mesma potência, porém com comprimento de onda $\lambda' = 660nm$



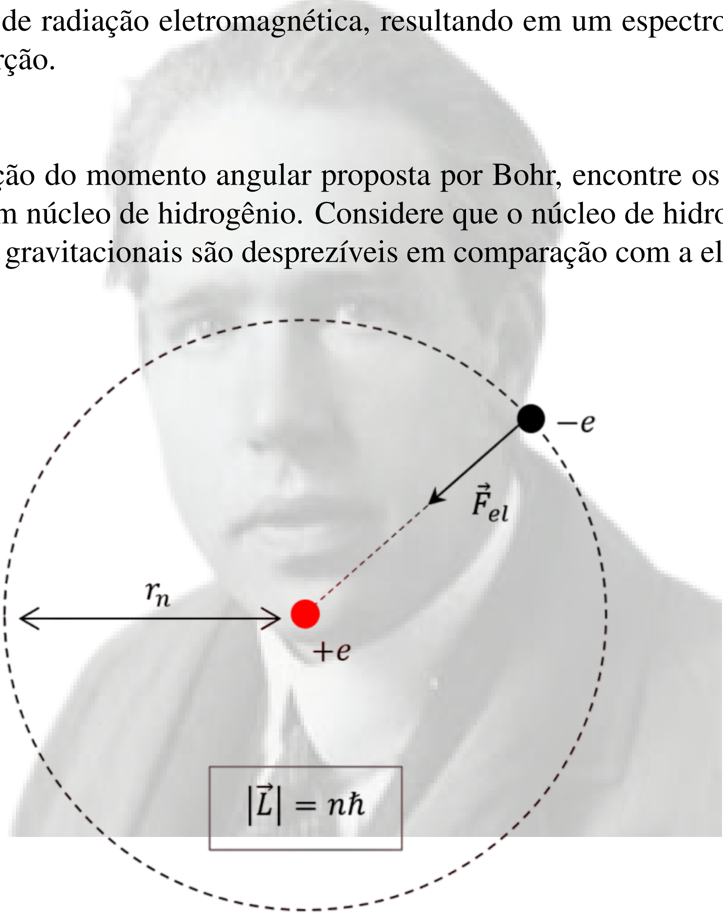
Bohr *

Niels Bohr, um físico teórico dinamarquês, foi um dos principais responsáveis por estabelecer as bases da física quântica no início do século XX. Nascido em 1885, Bohr contribuiu significativamente para a compreensão da estrutura do átomo e desenvolveu o modelo do átomo de hidrogênio, que se tornou um marco na história da ciência.

Uma das suas principais descobertas foi a **quantização do momento angular** ($L = n\hbar$) **e dos níveis de energia no átomo de hidrogênio**. De acordo com o modelo proposto por Bohr, os elétrons em órbita ao redor do núcleo do átomo só podem ocupar certos níveis discretos de energia. Esses níveis de energia estão relacionados à órbita que o elétron ocupa e são representados por números quânticos.

Bohr estabeleceu que, quando um elétron absorve ou emite energia, ele salta de um nível de energia para outro, em um processo chamado **transição eletrônica**. Essas transições são acompanhadas pela emissão ou absorção de radiação eletromagnética, resultando em um espectro característico de linhas de emissão ou absorção.

Aceitando a quantização do momento angular proposta por Bohr, encontre os níveis de energia de um elétron orbitando um núcleo de hidrogênio. Considere que o núcleo de hidrogênio permanece parado e que as interações gravitacionais são desprezíveis em comparação com a elétrica.



Se necessário, use os seguintes valores:

Constante de planck reduzida $\hbar = 6,58 \cdot 10^{-16} eV$

Constante eletrostática $k = 9 \cdot 10^{9} N m^2/C^2$

Carga do elétron $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$

Carga do próton $Q_p - +1,6 \cdot 10^{-19} C$

Massa do elétron $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} kg$

Maxwell *

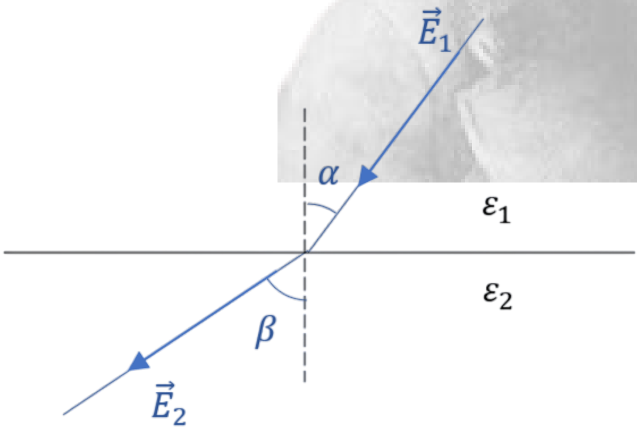
James Clerk Maxwell, um físico e matemático escocês do século XIX, é amplamente reconhecido por suas contribuições fundamentais para o campo da eletromagnetismo. Nascido em 1831, Maxwell formulou um conjunto de equações que descrevem o comportamento dos campos elétricos e magnéticos e estabeleceram as bases para a compreensão moderna da luz, eletricidade e magnetismo: as famosas **equações de Maxwell**.

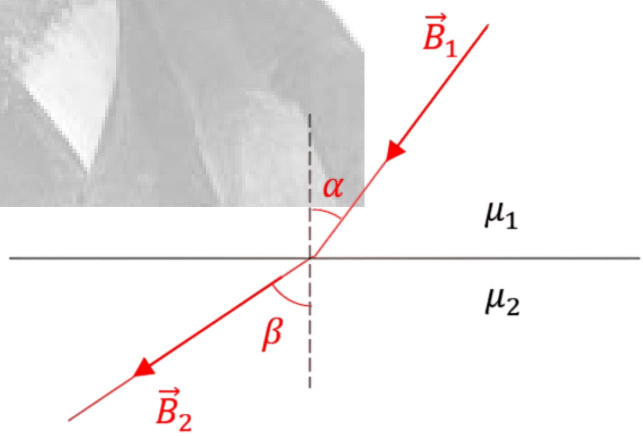
$$
\begin{aligned}
&(i)\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho && \text{(Lei de Gauss)}\\
&(ii)\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 && \text{(Sem nome)}\\
&(iii)\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \text{(Lei de Faraday)}\\
&(iv)\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} && \text{(Lei de Àmpere)}
\end{aligned}
$$

Uma das áreas em que Maxwell deixou um legado duradouro foi a descrição matemática das condições de contorno dessas equações para a interface de materiais. **As equações de Maxwell descrevem como os campos elétricos e magnéticos se relacionam entre si e como se propagam no espaço**. No entanto, quando esses campos encontram uma interface entre diferentes materiais, surgem condições especiais que devem ser levadas em consideração.

Podemos desenvolver uma série de condições de contorno que descrevem como os campos elétricos e magnéticos se comportam nas interfaces. Essas condições são fundamentais para entender a **reflexão, refração e propagação de ondas eletromagnéticas em diferentes meios**.

De acordo com as condições de contorno apresentadas nas figuras abaixo (que decorrem diretamente das equações de Maxwell mostradas anteriormente), encontre as razões $\tan(\beta)/\tan(\alpha)$.





$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 E_1^{\perp} &= \varepsilon_2 E_2^{\perp}\\
E_1^{\parallel} &= E_2^{\parallel}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_1}B_1^{\parallel} &= \frac{1}{\mu_2}B_2^{\parallel}\\
B_1^{\perp} &= B_2^{\perp}
\end{aligned}
$$

Stephen Hawking *

Stephen Hawking foi um renomado físico teórico e cosmólogo britânico, nascido em 1942 e falecido em 2018. Ele fez contribuições notáveis para a física teórica, especialmente no campo da **gravidade quântica e da cosmologia**. Hawking ficou conhecido por suas pesquisas pioneiras sobre buracos negros e suas teorias revolucionárias sobre a evaporação desses objetos cósmicos.

Uma das principais descobertas de Hawking foi a de que os buracos negros não são completamente negros, como sugere a teoria clássica. Em vez disso, eles emitem uma radiação térmica, conhecida como **Radiação Hawking**. Essa radiação é **resultado da interação entre efeitos quânticos e gravitacionais próximos ao horizonte de eventos de um buraco negro**.

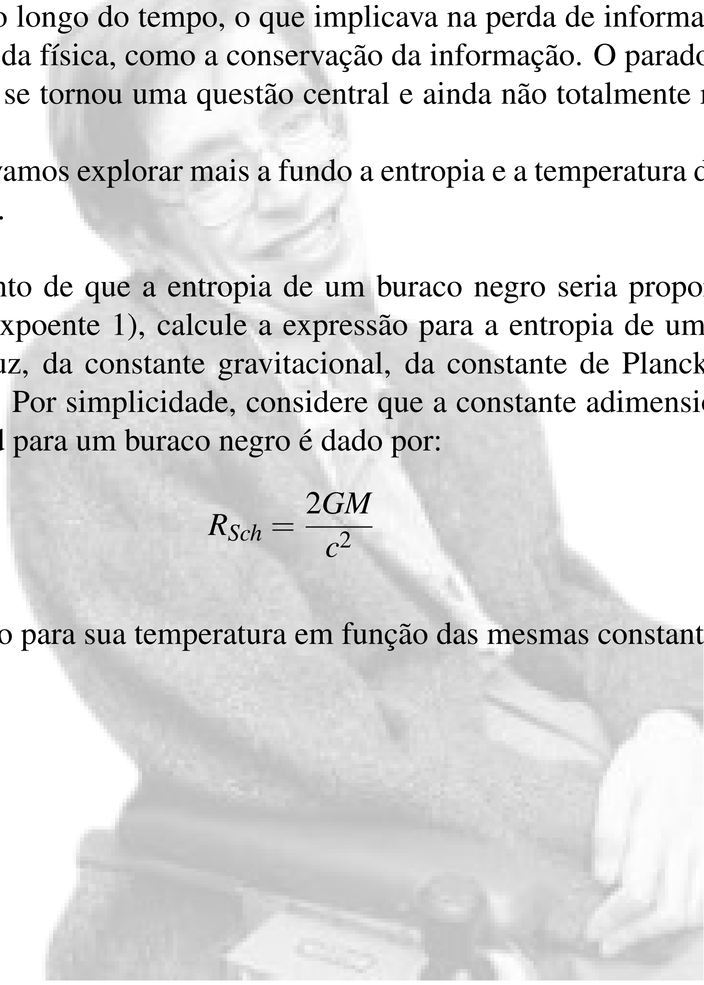
Ao estudar a radiação Hawking, Hawking percebeu que a evaporação dos buracos negros leva à diminuição de sua massa ao longo do tempo, o que implicava na perda de informação. Isso desafiou os princípios fundamentais da física, como a conservação da informação. O paradoxo da informação perdida em buracos negros se tornou uma questão central e ainda não totalmente resolvida na física teórica.

Tendo isso em mente, vamos explorar mais a fundo a entropia e a temperatura dos buracos negros em uma situação hipotética.

a) Usando um argumento de que a entropia de um buraco negro seria proporcional à sua área superficial (elevada a um expoente 1), calcule a expressão para a entropia de um buraco negro em função da velocidade da luz, da constante gravitacional, da constante de Planck, da constante de Boltzmann e de sua massa. Por simplicidade, considere que a constante adimensional vale 1. Saiba que o Raio de Schwarschild para um buraco negro é dado por:

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} \tag{1}$$

b) Derive uma expressão para sua temperatura em função das mesmas constantes.



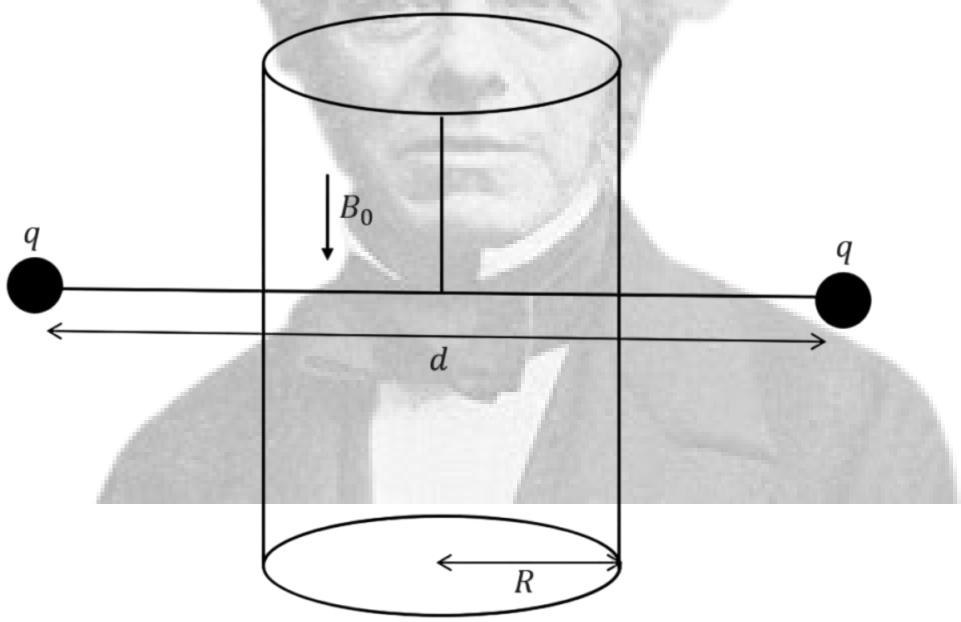
Faraday **

Michael Faraday, nascido em 1791 e falecido em 1867, foi um físico e químico britânico que **fez contribuições fundamentais no campo da eletricidade e do magnetismo**. Ele é amplamente reconhecido por suas descobertas pioneiras na área da **indução eletromagnética**. Faraday realizou uma série de experimentos para investigar as relações entre eletricidade e magnetismo. Seus experimentos mais famosos envolviam a movimentação de um ímã próximo a uma bobina de fio condutor. Ele observou que, ao mover o ímã, uma corrente elétrica era induzida na bobina. Essa descoberta levou à formulação da lei da indução eletromagnética, conhecida como **Lei de Faraday**.

A partir das contribuições de Faraday, a indução eletromagnética se tornou uma **base para o desenvolvimento de geradores elétricos, transformadores e diversos dispositivos que utilizam a conversão de energia magnética em energia elétrica**. Essa descoberta teve um impacto significativo no campo da eletricidade e contribuiu para o desenvolvimento da sociedade moderna.

Agora, vamos explorar um problema que envolve a indução eletromagnética, inspirado nas descobertas de Michael Faraday.

Duas pequenas bolas idênticas, de massa m cada uma, feitas de material isolante, são presas às extremidades de uma haste isolante leve de comprimento d. A haste está suspensa no teto por uma fibra fina e sem torção, conforme mostrado na figura.



Cada bola possui uma carga q. Existe um campo magnético uniforme B_0, apontando verticalmente para baixo, em uma região cilíndrica de raio R. A fibra está ao longo do eixo da região cilíndrica. O sistema está inicialmente em repouso. Agora, o campo magnético é subitamente desligado.

Calcule a velocidade angular adquirida pelo sistema.

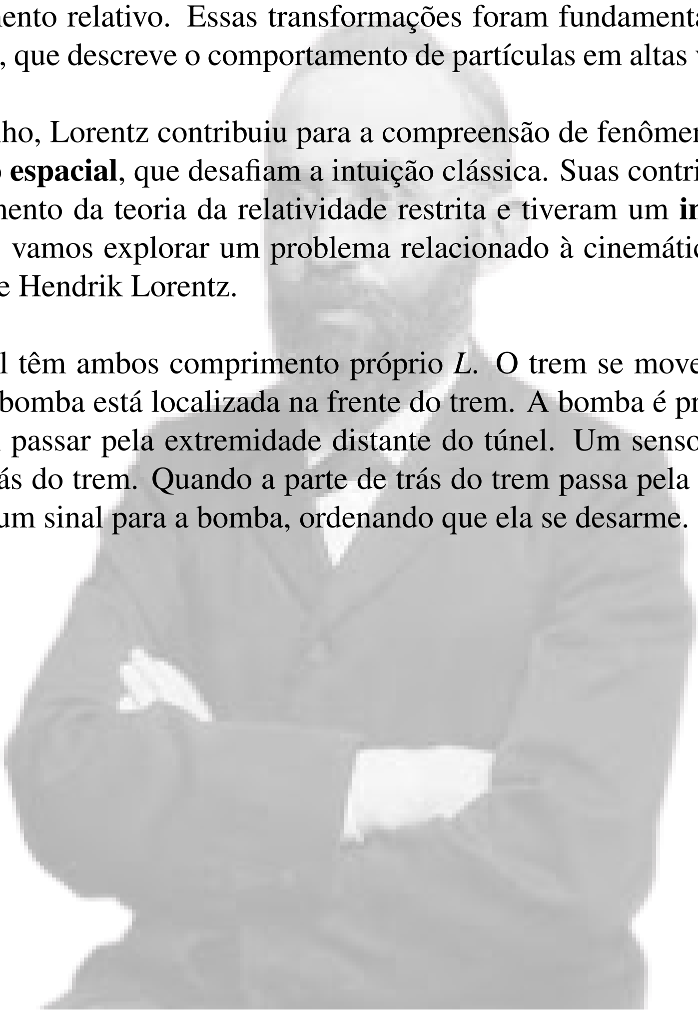
Lorentz**

Henri Poincaré, um renomado físico e matemático, certa vez afirmou que "Lorentz não é apenas um grande cientista, mas também um profundo filósofo". **Hendrik Antoon Lorentz**, nascido em 1853 e falecido em 1928, foi um físico holandês que fez contribuições significativas para o desenvolvimento da **teoria do eletromagnetismo e para a compreensão das leis fundamentais da natureza**.

Lorentz desempenhou um papel crucial na **formulação dos princípios da relatividade especial**. Ele, juntamente com Albert Einstein, desenvolveu independentemente as **transformações de Lorentz**, que descrevem como as grandezas físicas se transformam quando observadas por diferentes observadores em movimento relativo. Essas transformações foram fundamentais para estabelecer a **cinemática relativística**, que descreve o comportamento de partículas em altas velocidades próximas à velocidade da luz.

Graças ao seu trabalho, Lorentz contribuiu para a compreensão de fenômenos como a **dilatação do tempo e a contração espacial**, que desafiam a intuição clássica. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita e tiveram um **impacto profundo na física moderna**. Agora, vamos explorar um problema relacionado à cinemática relativística, inspirado nas contribuições de Hendrik Lorentz.

Um trem e um túnel têm ambos comprimento próprio L. O trem se move em direção ao túnel com velocidade v. Uma bomba está localizada na frente do trem. A bomba é projetada para explodir quando a frente do trem passar pela extremidade distante do túnel. Um sensor de desativação está localizado na parte de trás do trem. Quando a parte de trás do trem passa pela extremidade próxima do túnel, o sensor envia um sinal para a bomba, ordenando que ela se desarme. A bomba explode?



Marie Curie **

Marie Curie, uma cientista notável do século XX, deixou uma marca indelével no campo da física e da química. Nascida na Polônia em 1867, ela se destacou como a **primeira mulher a receber um Prêmio Nobel** e uma das únicas pessoas a ganhar um prêmio em duas disciplinas diferentes: **química e física**. Infelizmente, devido à constante exposição à radiação, Curie sofreu grandes complicações em sua saúde, vindo a falecer em 1984 aos 66 anos.

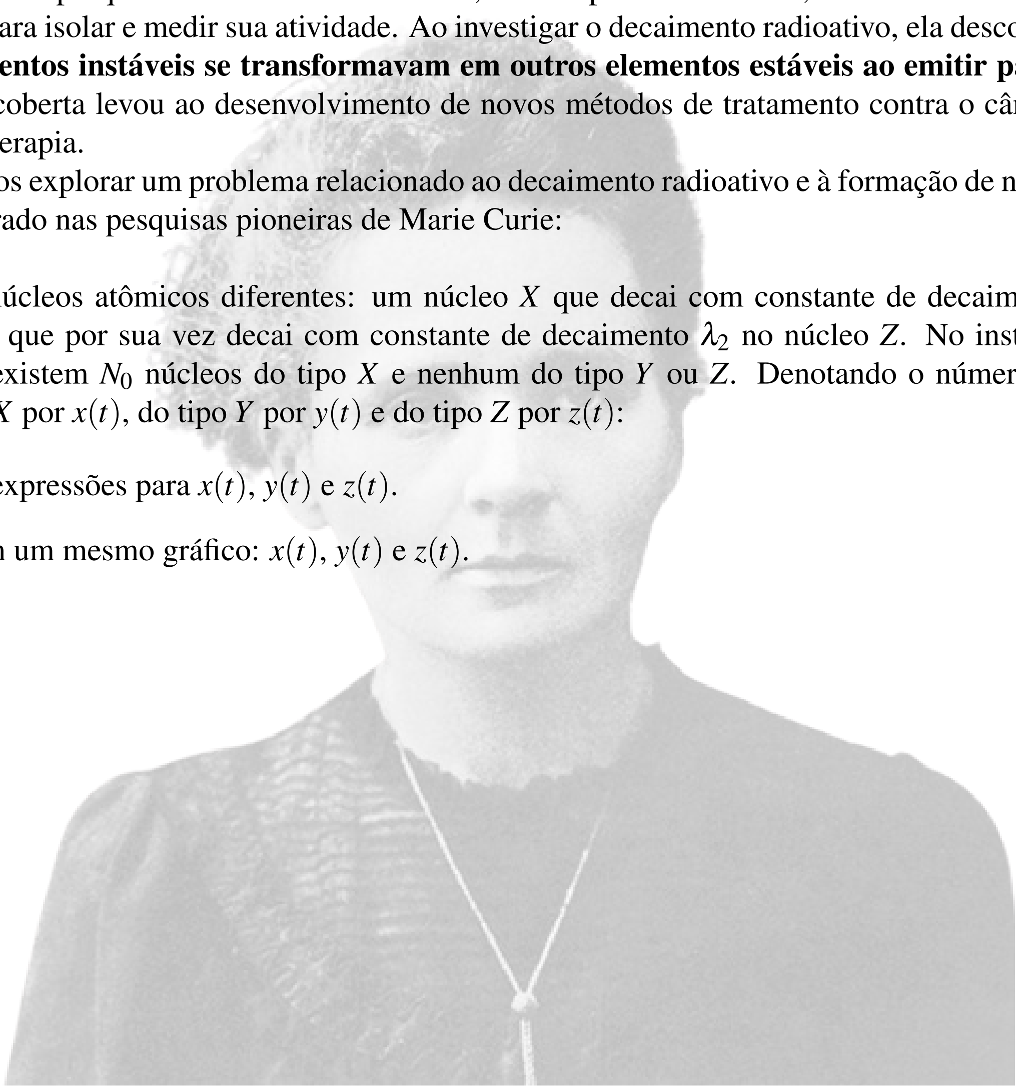
Uma de suas contribuições mais importantes foi o estudo do fenômeno do decaimento radioativo. Curie foi pioneira na pesquisa de materiais radioativos, como o polônio e o rádio, e desenvolveu técnicas inovadoras para isolar e medir sua atividade. Ao investigar o decaimento radioativo, ela descobriu que **certos elementos instáveis se transformavam em outros elementos estáveis ao emitir partículas**. Essa descoberta levou ao desenvolvimento de novos métodos de tratamento contra o câncer, através da radioterapia.

Agora, vamos explorar um problema relacionado ao decaimento radioativo e à formação de novas partículas, inspirado nas pesquisas pioneiras de Marie Curie:

Considere três núcleos atômicos diferentes: um núcleo X que decai com constante de decaimento λ_1 no núcleo Y, que por sua vez decai com constante de decaimento λ_2 no núcleo Z. No instante inicial ($t = 0$), existem N_0 núcleos do tipo X e nenhum do tipo Y ou Z. Denotando o número de núcleos do tipo X por $x(t)$, do tipo Y por $y(t)$ e do tipo Z por $z(t)$:

(a) Encontre expressões para $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

(b) Esboce em um mesmo gráfico: $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.



Schrödinger ***

Erwin Schrödinger, um físico teórico austríaco, foi um dos principais pioneiros da mecânica quântica. Talvez você apenas o conheça como "o físico do gato", mas a verdade é que Schrödinger desenvolveu uma das equações mais importantes da física quântica, a **equação de Schrödinger**:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

Uma das aplicações notáveis da equação de Schrödinger é a resolução do problema do potencial "step"(degrau). Esse problema descreve uma partícula que encontra uma barreira de potencial repentina, como uma transição de uma região com um potencial constante para outra com um potencial diferente.

Na mecânica clássica, sabemos que se uma bolinha encontra uma barreira mais alta do que ela consegue "pular", então a bolinha nunca irá atravessar a barreira. Mas veremos que na física quântica, mesmo que a partícula possua uma energia E menor do que o potencial V_0 de uma barreira, **existe uma probabilidade da partícula simplesmente atravessar a barreira de potencial!**

Vamos calcular essas probabilidades associadas à transmissão ou reflexão da partícula. Para isso, adote que a equação de Schrödinger independente do tempo e unidimensional é da seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

Onde m é a massa da partícula, E sua energia, V o potencial da região que a partícula se encontra e ψ sua função de onda. Considere que a partícula atravessa da região 1, de potencial nulo, para a região 2, de potencial constante V_0. Faça o que se pede:

(a) Mostre que para a região 1, a função de onda da partícula é da forma $\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$, enquanto que para a região 2, $\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$, onde $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ e $k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$.

(b) A realidade é que essas funções de onda representam a superposição de 2 ondas diferentes: uma progressiva e uma regressiva. Identifique quais dos termos das funções de onda anteriores representam respectivamente, a onda incidente, a refletida e a transmitida. Também dê argumentos qualitativos para que D seja nulo.

(c) Sabendo que na interface entre meios de potenciais diferentes, tanto a função de onda quanto sua derivada são contínuas, encontre os coeficientes $R = \left|\frac{\text{Amplitude da onda refletida}}{\text{Amplitude da onda incidente}}\right|^2$ e $T = \frac{k_2}{k_1}\cdot\left|\frac{\text{Amplitude da onda transmitida}}{\text{Amplitude da onda incidente}}\right|^2$, que definem as probabilidades da partícula ser refletida pela barreira ou atravessá-la, respectivamente. Deixa suas respostas em função de k_1 e k_2, definidos anteriormente.

Fourier ***

Jean-Baptiste Joseph Fourier, nascido em 1768 e falecido em 1830, foi um matemático e físico francês conhecido por suas contribuições fundamentais para o campo da análise matemática e da teoria do calor. Fourier desenvolveu a **Transformada de Fourier**, um método matemático revolucionário para analisar funções periódicas complexas em termos de ondas sinusoidais simples. Sua descoberta teve um impacto profundo em várias áreas da física e da engenharia, incluindo a teoria do calor.

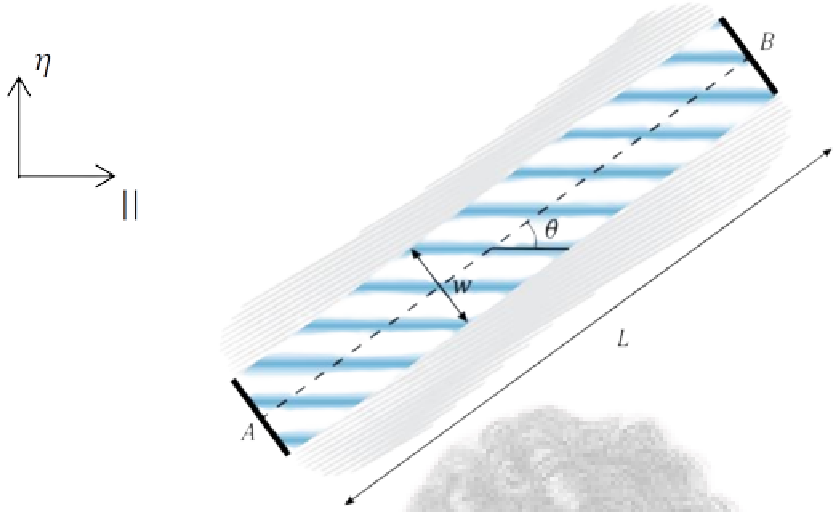
A **Lei de Fourier**, que será abordada nesta questão, é uma das contribuições mais significativas de Fourier para a física. Ela descreve como o calor se propaga por condução térmica em um meio sólido ou em regime estacionário. De acordo com a Lei de Fourier, o fluxo de calor é proporcional à área de seção transversal pela qual o calor flui, à diferença de temperatura através desse material e inversamente proporcional à espessura desse material. Essa relação fundamental permitiu **avanços significativos no projeto de sistemas de aquecimento, isolamento térmico e resfriamento de diversos dispositivos e estruturas**. Vamos mergulhar nesse assunto e explorar um exemplo prático envolvendo a Lei de Fourier quando há anisotropia.

Materiais anisotrópicos são caracterizados por valores diferentes para medições feitas em várias direções. Para materiais com propriedades anisotrópicas de condutividade térmica, a direção da mudança de temperatura na amostra pode ser diferente da direção do fluxo de calor.

Na formulação geral, a Lei de Fourier para transferência de calor é escrita em termos de tensores, que são matrizes que descrevem as propriedades em várias direções. Neste caso, vamos considerar um exemplo simples de um tensor com apenas componentes diferentes de zero ao longo das direções principais x, y e z do sistema de coordenadas cartesianas. Os coeficientes de condutividade térmica ao longo dessas direções são denotados por k_x, k_y e k_z, respectivamente. Para essa configuração específica, a Lei de Fourier pode ser descrita da seguinte forma:

$$\vec{\varphi} = -\left[\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)\hat{x} + \left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)\hat{y} + \left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)\hat{z}\right] \tag{2}$$

As notações relacionadas à temperatura são chamadas de derivadas parciais. Considere um pedaço de material em camadas, que possui coeficiente de condutividade térmica ao longo das fibras horizontais $k_{||}$ e perpendicular a elas $k_{\perp}$. Uma placa retangular fina com espessura ε, largura w e comprimento L é cortada desse material anisotrópico, de modo que as fibras formem um ângulo θ com a direção do lado mais longo da placa, conforme mostrado na figura.



Todos os lados da placa, exceto as faces A e B, são isolados termicamente, garantindo que não haja perdas de calor pelas laterais.

Determine a quantidade de calor por unidade de tempo $\dot{Q}(A \to B)$ transferido entre as extremidades abertas da placa, em estado estacionário, se a face inferior A for mantida à temperatura constante T_A, enquanto o outro lado aberto B possui temperatura mais baixa T_B.

Newton ***

Isaac Newton, nascido em 1643 e falecido em 1727, foi um renomado físico, matemático e astrônomo britânico. Ele é amplamente conhecido por suas contribuições revolucionárias na área da física, incluindo a **formulação da Lei da Gravitação Universal e o desenvolvimento do cálculo infinitesimal**.

A Lei da Gravitação Universal de Newton descreve a força de atração entre duas massas no universo. Segundo essa lei, a força gravitacional entre duas massas é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Essa descoberta teve um impacto profundo na compreensão da dinâmica celestial e na explicação do movimento dos planetas ao redor do Sol. Além disso, Newton enunciou as **três leis da dinâmica**, que descrevem o comportamento dos corpos em movimento e são fundamentais para a física clássica.

As contribuições de Newton estabeleceram as bases para a física moderna. Sua invenção do cálculo infinitesimal permitiu a análise matemática de fenômenos em constante mudança, enquanto suas leis da dinâmica forneceram um novo entendimento do movimento dos corpos. Juntas, essas descobertas revolucionaram a ciência e continuam a influenciar a física e a matemática até os dias de hoje.

Vamos agora a um problema de Gravitação Universal que explora alguns dos conceitos deixados por Newton.

a)Resolvendo uma equação diferencial com a força gravitacional, chegamos numa expressão que descreve o movimento de um corpo por ação de uma força central:

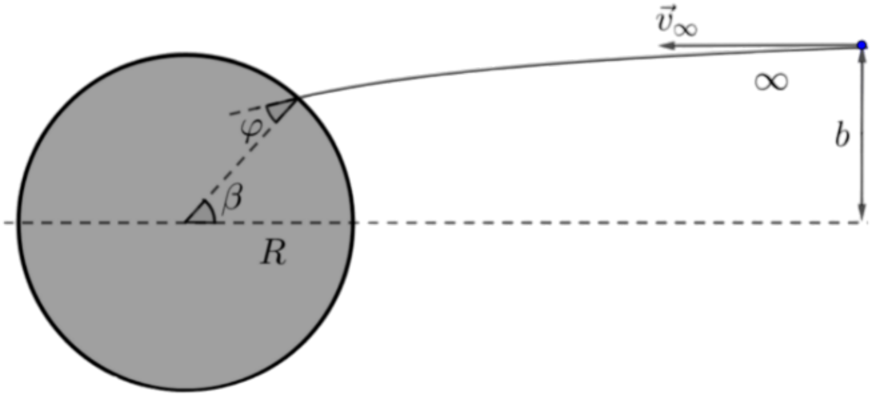
$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + k\cos\theta} \tag{3}$$

Em que L é o momento angular do corpo orbitante, uma constante, m é sua massa, M é a massa do corpo orbitado e k é certa constante. Essa equação é identica àquela de uma cônica. Por exemplo, a equação de uma hipérbole é:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\theta} \tag{4}$$

Em que a é o semieixo maior da hipérbole, e e é sua excentricidade. Descreva, então, o momento angular específico ($h = \frac{L}{m}$) de um corpo orbitante em uma órbita hiperbólica em função dos parâmetros citados nesse enunciado.

b) A energia total de uma órbita hiperbólica pode ser escrita como $E = \frac{GMm}{2a}$. Seja uma nave que vem do infinito em direção a certo planeta de massa M e raio R, com uma velocidade v_∞ e um parâmetro de impacto b, como na imagem. Qual é o semieixo maior de sua órbita?



c) Qual seria a excentricidade de sua órbita?

d) Em um certo momento, a espaçonave colide com a superfície do astro. Definimos φ como sendo o menor ângulo entre o vetor velocidade da nave imediatamente antes do choque e a linha radial do planeta. Calcule o ângulo φ.

e) Calcule o ângulo β, que caracteriza o ponto de colisão da nave com o planeta.

f) Após a nave colidir com a superfície do planeta, seu piloto percebe que, na realidade, ele é oco. A nave atravessa o planeta sem problemas e, após viajar por um tempo muito grande, sua velocidade possui um ângulo δ com a velocidade inicial $\vec{v_\infty}$. Calcule δ em função de β e φ.

Gabarito

Einstein *

a) $\tau \approx 0.0625$s

b) Não ocorrerá efeito fotoelétrico, portanto, a placa nunca descarregará

Bohr *

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}eV$$

Maxwell *

$\tan\beta/\tan\alpha = \varepsilon_2/\varepsilon_1$; $\tan\beta/\tan\alpha = \mu_2/\mu_1$

Stephen Hawking *

a) $S = \dfrac{16\pi G M^2 k_B}{hc}$

b) $T = \dfrac{\hbar c^3}{G M k_B}$

Faraday **

$$\omega = \frac{2B_0 q R^2}{m d^2}$$

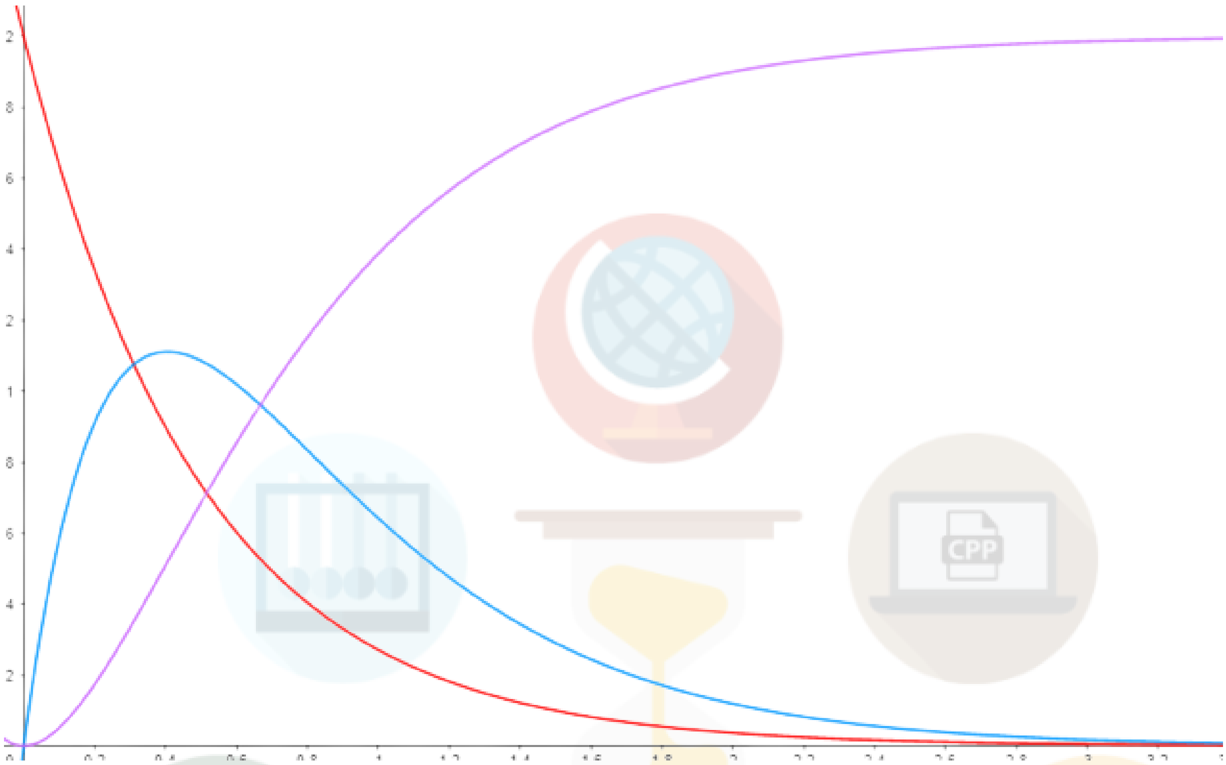
Lorentz **

A bomba explode. No referencial do trem, fica claro que ela explode, já que o túnel possui um comprimento $L' = \frac{L}{\gamma}$, então o sensor não passa antes da bomba passar pelo final do túnel. No referencial do túnel, a bomba explode porque a informação que o sensor passa não pode ultrapassar a velocidade da luz. Então, o tempo que leva para a informação chegar do sensor à bomba $\left(t = \dfrac{L}{\gamma c}\right)$ deveria ser menor que o tempo que a bomba leva para chegar no fim do túnel $t' = \left(\dfrac{L}{v} - \dfrac{L}{\gamma v}\right) = \dfrac{L}{v}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)$ para que ela não exploda. Perceba que $t' < t$.

Marie Curie **

a) $x(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$; $y(t) = \dfrac{N_0\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$; $z(t) = \dfrac{N_0\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\dfrac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \dfrac{1-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2}\right)$

b)



A linha vermelha representa $x(t)$, a azul $y(t)$ e a roxa $z(t)$

Schrödinger ***

a) Para a região 1 $(V=0) \rightarrow \dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \Rightarrow$ Soluções do tipo $\psi(x) = Ge^{\pm kx}$, onde $k = 2mE/\hbar^2$. Idem para a região 2.

b) A, B e C respectivamente. Da mesma forma que as ondas de coeficientes A e C se propagam para a direita, B e D são ondas que se propagam para a esquerda. Porém como não há como a onda C ser refletida, não haverá ondas se propagando pra esquerda na região 2. Logo, D=0

c) $R = \left(\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$; $T = \dfrac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$

Fourier ***

$$\dot{Q}_{(A\rightarrow B)} = \left(\frac{k_\perp k_{||}}{k_\perp \cos^2(\theta) + k_{||}\sin^2(\theta)}\right)\frac{w\varepsilon(T_A - T_B)}{L}$$

Newton ***

a) $L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$

b) $a = \dfrac{GM}{v_\infty}$

c) $e = \sqrt{1 - \dfrac{v_\infty^2 b^2}{GMa}} = \sqrt{1 - \dfrac{v_\infty^4 b^2}{G^2M^2}}$

d) $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{b}{R}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2GM}{v_\infty^2 R}}}\right)$

e) $\beta = \arccos\left(\dfrac{-1}{e}\right) - \arccos\left[\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{v_\infty^2 b^2}{GMR} - 1\right)\right]$

f) $\delta = 2(\beta - \varphi)$