Soluções dos Problemas - 30/04

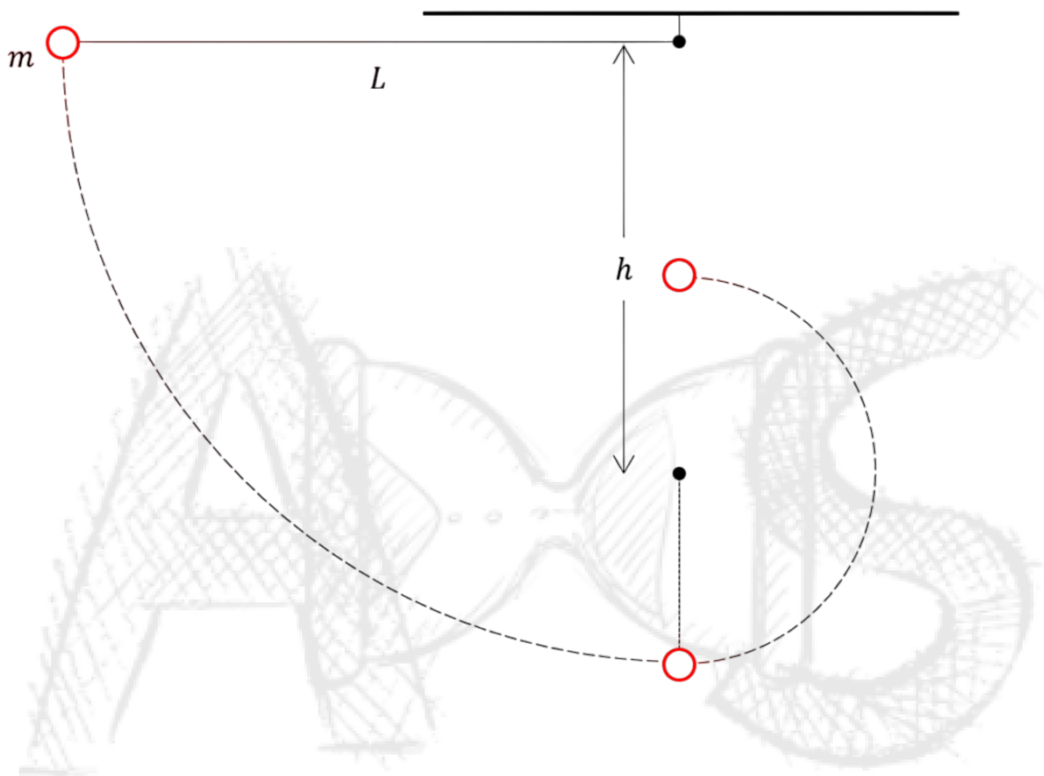
Gabriel Baptista e Gustavo Valente

Enrola, enrola *

"Um fio inextensível com uma massa m fixa em uma das extremidades, e a outra extremidade fixa no teto.

Considere que a massa foi abandonada paralelamente ao teto, e que a uma distância h existe um prego, ao qual o fio vai se enrolar após ser abandonado. A gravidade local vale g.

Qual o comprimento L mínimo que o fio deve ter para que ele consiga efetuar uma volta completa em torno do prego?"



Solução:

É fácil ver que o sistema é **conservativo**, portanto a energia mecânica da massa m permanece constante ao longo de toda sua trajetória. Isso nos permite escrever que:

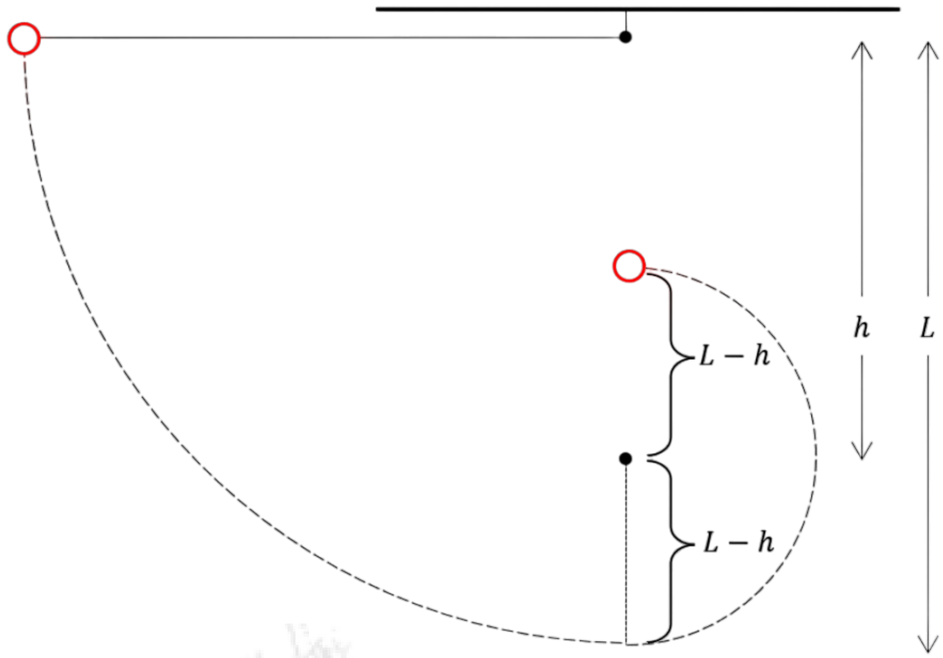
$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = cte$$

Conservando a energia nos dois pontos representados na imagem abaixo, escrevemos obtemos a seguinte relação:

$$\frac{1}{2}mv^2 + 2mg(L-h) = mgL$$

$$\frac{v^2}{2} = 2gh - gL$$

$$\boxed{v^2 = 2g(2h-L)}$$



Essa velocidade v se refere a velocidade que a partícula tem no segundo ponto que estamos analisando. Como a partícula realizará uma volta completa em torno do prego, podemos analisar a resultante centrípeta no ponto mais alto da trajetória:

$$\frac{mv^2}{L-h} = T + mg$$

Onde T é a tração na corda. Como estamos buscando o caso em que o comprimento necessário é mínimo, queremos que o fio esteja na tendência de ficar folote (frouxe) e, portanto, $T = 0$. Segue que

$$v^2 = g(L-h) = 2g(2h-L)$$
$$4h - 2L = L - h \Rightarrow 5h = 3L$$
$$\boxed{L = \frac{5}{3}h}$$

Balde e Caranguejo **

"Um certo dia, Balde, pensando em melhorar seu ambiente doméstico, e aumentar sua privacidade quando precisava trabalhar em home-office, pediu uma sugestão ao seu sobrinho Caranguejo.

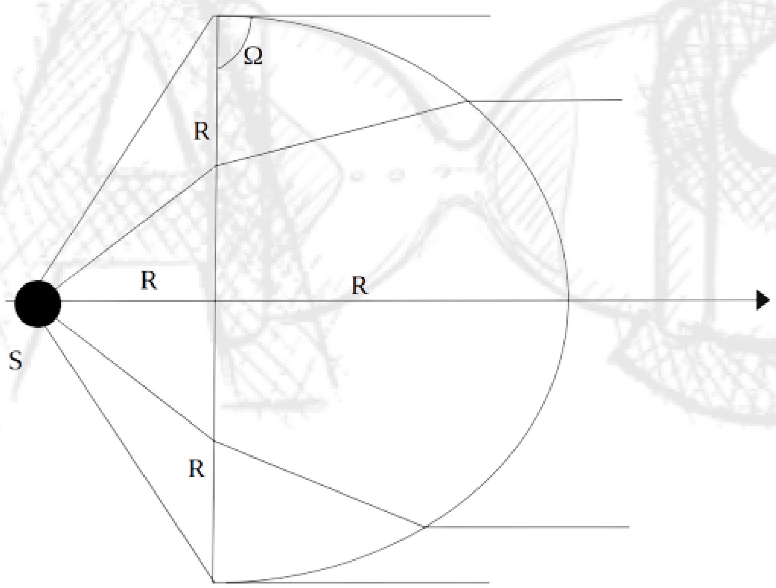
Caranguejo sugeriu a instalação de uma lente plano-convexa nas janelas de seu quarto, para maior conforto ocular de Balde, mas observando com cuidado, percebeu que a lente precisaria ter um ângulo de 60° (representado na figura por Ω). Para testar se as lentes no mercado poderiam ser instaladas, Caranguejo fez o seguinte procedimento:

Instalou uma fonte de luz isotrópica S, distando R da face plana da lente, e sobre o seu eixo principal. O formato da lente faz com que todos os raios incidentes deixem a lente paralelos ao eixo principal. Sabendo disso, determine o que se pede:

Considere o índice de refração do meio da fonte $n = 1$**.**

(a) *Determine o ìndice de refração da lente*

(b) *Determine se a lente abaixo, de diâmetro 2R, pode ser instalada com sucesso nas janelas de Balde."*

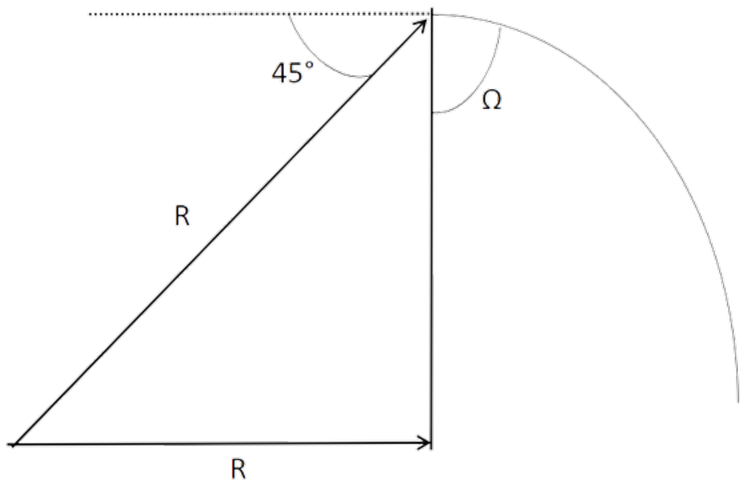


Solução:

Para começar a solução desse problema, precisamos notar que as fórmulas mais conhecidas para dióptros esféricos ou lentes não podem ser utilizadas neste caso. Da mesma forma, não existem condições de Gauss. Isso tudo se deve ao fato da lente não mais ser delgada.

Porém, o princípio de Fermat continua válido e não há restrições para sua aplicabilidade no nosso problema. Ele nos garante que raios de luz de uma mesma frente de onda percorreram o mesmo caminho óptico. Como os raios que saíram da mesma fonte seguem paralelos após passarem da lente, eles irão compor uma frente de onda.

Portanto, o raio que passa perpendicular ao centro da lente e o raio que a atravessa passando por uma de suas extremidades percorreram o mesmo caminho óptico.



Podemos notar então, por conta de propriedades geométricas, que é possível escrever a primeira parte do caminho óptico do raio que bate na extremidade da lente como a diagonal de um quadrado de raio R. Logo, podemos aplicar o princípio de Fermat e igualar os caminhos ópticos da seguinte forma:

$$\sqrt{2}R + R = R + nR$$

Pela expressão acima, é possível encontrar facilmente o índice de refração da lente.

$$\boxed{n = \sqrt{2}}$$

Com o valor do índice de refração em mãos, podemos analisar as refrações sofridas pelo raio de luz que foi direcionado à extremidade da lente.

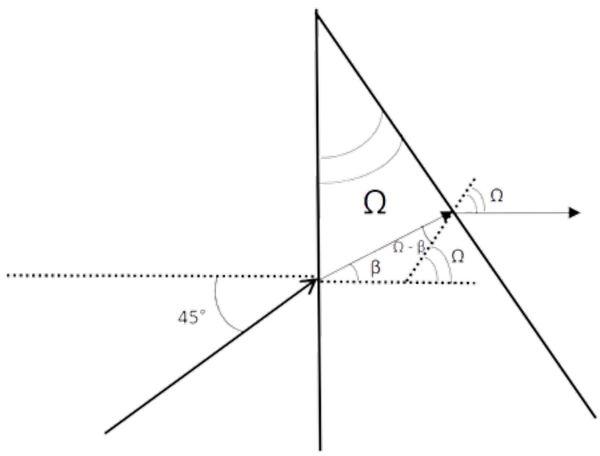


Imagem ampliada representando o percurso percorrido pelo raio de luz

Sendo o ângulo β aquele que o raio assume com a superfície após refratar na lente, podemos analisar a geometria do problema para encontrar relações entre Ω e β. A ánalise geométrica da situação já está representada na figura acima.

Podemos usar então, a lei de Snell para encontrar o valor de β:

$$1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \sin \beta$$
$$\beta = 30^\circ$$

Com o valor de beta, podemos aplicar a lei de Snell novamente, mas desta vez para o ponto no qual o raio sai da lente:

$$\sqrt{2} \cdot \sin(\Omega - \beta) = 1 \cdot \sin \Omega$$
$$\sqrt{2}\left(\sin \Omega \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cos \Omega\right) = \sin \Omega$$
$$\sqrt{3} \sin \Omega - \cos \Omega = \sqrt{2} \sin \Omega$$
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \sin \Omega = \cos \Omega$$

Logo:

$$\tan \Omega = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Então, temos que o valor de Omega será de:

$$\Omega = \arctan(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$\boxed{\Omega = 64.5^\circ}$$

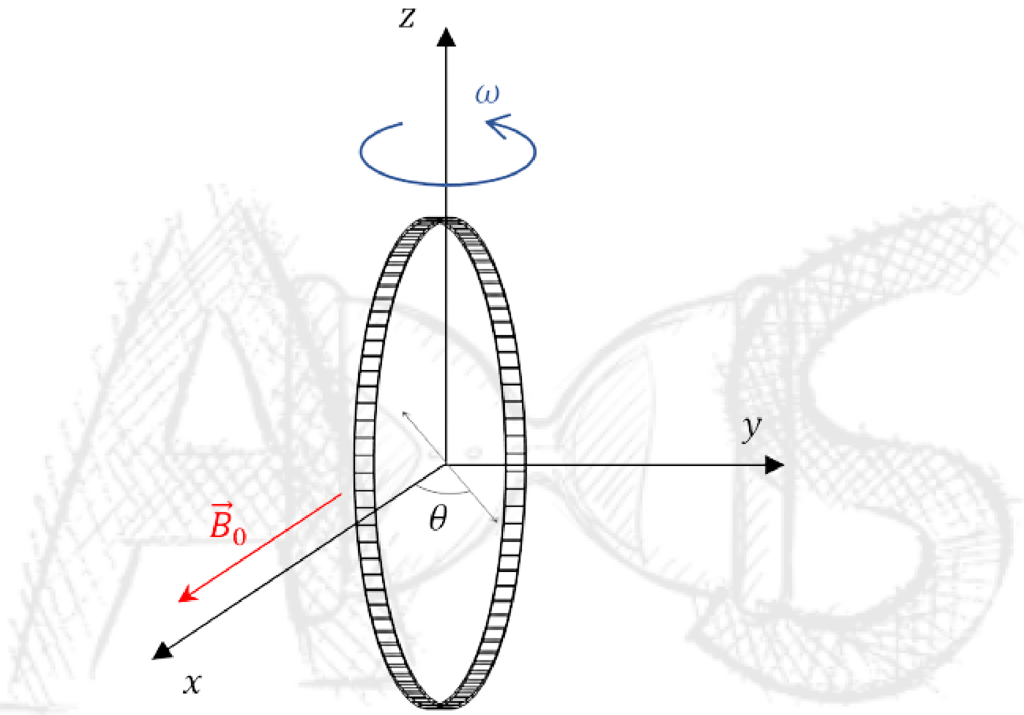
Logo, não será possível instalar esta lente, pois ela tem uma abertura diferente de 60°.

Bússola Oscilante ***

"Um anel de raio a, resistência R e auto-indutância desprezível é posto para girar com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ em uma região onde há um campo magnético constante $\vec{B_0} = B_0\hat{x}$.

Agora, colocamos uma bússola no centro do anel, tal que ela se mantenha sempre no plano XY e livre para girar em torno de seu próprio eixo. Logo após a bússola ser colocada, ela oscilará rapidamente, porém após um longo tempo ela ficará apontando em um ângulo constante θ com o eixo X.

Qual será o ângulo θ em que a bússola estará apontando quando o estado estacionário for alcançado?"



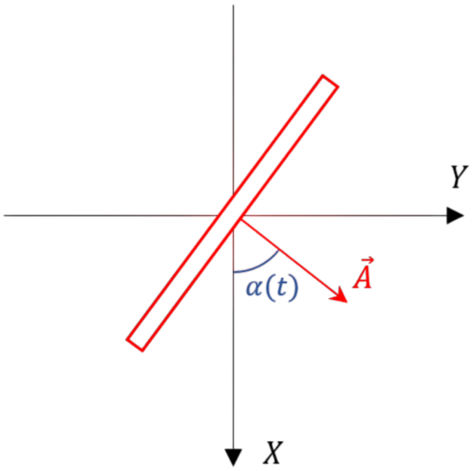
Solução:

O movimento de giro do anel causará uma variação na área perpendicular ao campo $\vec{B_0}$. Como resultado, corrente começará a fluir através do anel e esta irá gerar um campo magnético que influenciará no ângulo θ que a bússola aponta.

Vamos começar calculando a corrente I que fluirá no anel. Sabemos que $\varepsilon = RI$, onde ε é a emf induzida no anel, tal que $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ e $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$.

Pela imagem na página a seguir, é fácil ver que $\vec{A} = \pi a^2 \left[\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y}\right]$. Portanto, o fluxo magnético $\Phi(t)$ será:

$$\Phi(t) = \int \vec{B_0} \cdot d\vec{A} = B_0 \pi a^2 \cos(\omega t)$$



Corte superior do anel; claramente $\alpha(t) = \omega t$

Segue que:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} = \boxed{I = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{R} \sin(\omega t)}$$

Esse corrente encontrada irá fluir no anel, produzindo um campo $B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$ idêntico àquele no centro de uma espira circular. Esse campo irá apontar na mesma direção do vetor área e, portanto, podemos o decompor em componentes x e y. O campo total em cada componente será:

$$B_x(t) = B_0 + \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{B_0 \omega a}{R} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$
$$B_y(t) = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{B_0 \omega a}{R} \sin^2(\omega t)$$

Como os campos acima são funções do tempo, a agulha ficará oscilando em torno de uma posição de equilíbrio. Porém precisamos lembrar que a agulha possui inércia, ou seja, ela não consegue acompanhar instantaneamente a variação do campo magnético. Como consequência, após um longo tempo a agulha ficará apontando em direção ao **campo médio resultante**.

Vamos nos lembrar que o valor médio de uma função $f(x)$ no intervalo entre x_1 e x_2 é igual a

$$< f >= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Aplicando essa equação para o intervalo de tempo de um período, vemos que $< \sin^2(\omega t) >=$ $< \cos^2(\omega t) >= 1/2$, enquanto $< \sin(\omega t) \cos(\omega t) >= 0$. Portanto, os campos médios em cada direção serão:

$$< B_x > = B_0$$
$$< B_y > = \frac{\mu_0 \pi}{4} \frac{B_0 \omega a}{R}$$

O ângulo θ será, portanto:

$$\tan\theta = \frac{< B_y >}{< B_x >} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\mu_0 \pi}{4} \frac{\omega a}{R}}$$