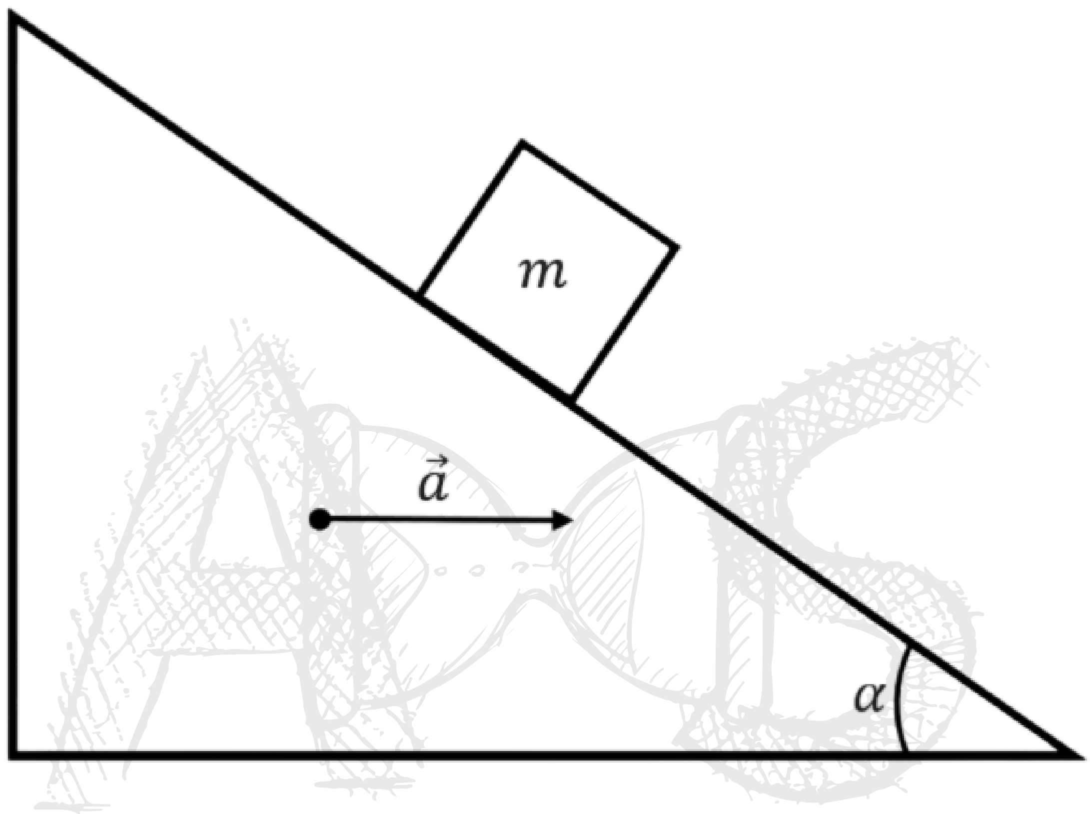
Soluções dos Problemas - 14/05

Mateus Freitas e Mychel Segrini

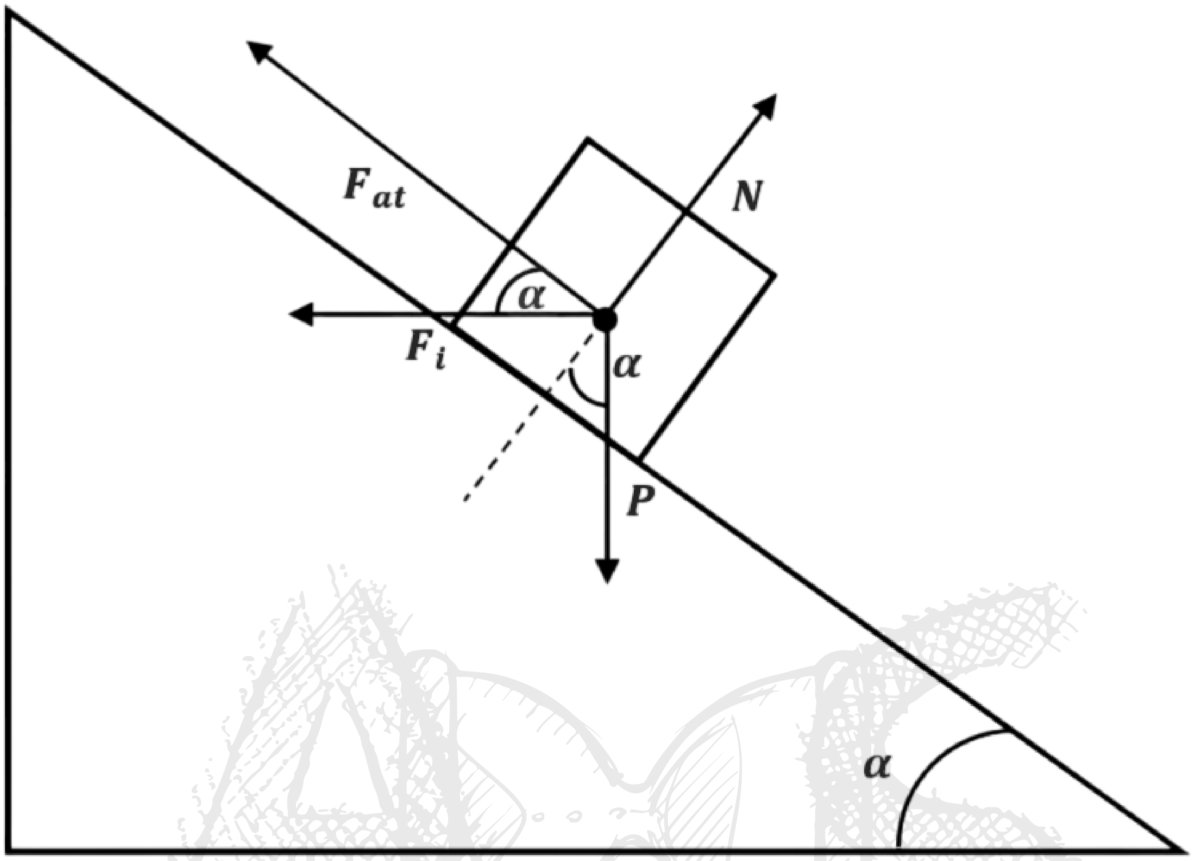
Segura o bloco! *

"Uma certa rampa triangular com inclinação α está sendo acelerada com aceleração a. Quanto deve ser o coeficiente de atrito para que o bloco não deslize? A gravidade é g."



Solução:

Provavelmente, a solução mais simples é ir para o referencial da rampa e trabalhar com forças de inércia. Perceba que, no referencial da rampa, basicamente, o bloco sente uma força para a esquerda de magnitude $F_i = ma$. Dessa forma, há essa força de inércia, o peso para baixo e o atrito na direção do plano apontando para o sentido de subida. Dessa forma, fica algo assim:



Com isso, para que o bloco permaneça parado, tem que ter equilíbrio de forças nas direções perpendicular e ao longo do plano. Com isso, obtemos:

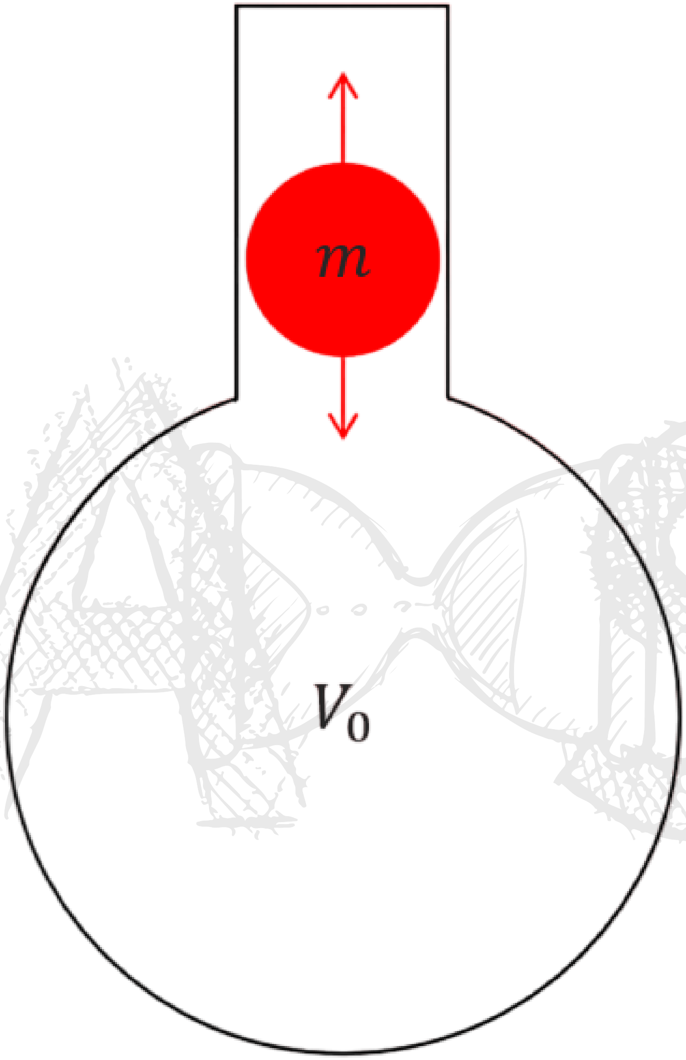
$$N = F_i \sin\alpha + P\cos\alpha$$
$$P\sin\alpha = F_{at} + F_i\cos\alpha$$

No caso limite, veja que $F_{at} = \mu N$. Logo:

$$\mu m(a\sin\alpha + g\cos\alpha) = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha)$$
$$\boxed{\mu = \frac{g\sin\alpha - a\cos\alpha}{a\sin\alpha + g\cos\alpha}}$$

Está com gases? **

"Considere que você tenha um recipiente cheio de um gás monoatômico. Ele está tampado por um pistão de massa m e área A, e possui, inicialmente, um volume V_0. Baldemor estava passando por ali e, vendo seu maquinário, decidiu te mostrar algo legal. Ele deu um peteleco no pistão e ele começou a oscilar pequeninamente, como na figura. Qual é o período de oscilações do pistão?"



Solução:

A situação pode ser encarada como uma transformação adiabática reversível, já que não há entrada de calor no sistema e as oscilações são pequeninas. Dessa forma, vale que $pV^{\gamma} = cte$, em que γ é o Coeficiente de Poisson. Isso será importantíssimo.

i) No início, quando não havia perturbação, o pistão estava estático, isto é, havia equilíbrio entre a força dada pela pressão do gás e o peso do pistão:

$$P_0A = mg$$
$$\boxed{P_0 = \frac{mg}{A}}$$

ii) Do fato de ser uma transformação reversível e adiabática, num instante qualquer:

$$P_0V_0^\gamma = PV^\gamma$$
$$P = P_0\frac{V_0^\gamma}{V^\gamma}$$

iii) Para um pequeno deslocamento x de sua posição de equilíbrio, podemos escrever que, sendo F a força resultante:

$$F = PA - mg$$
$$F = AP_0\frac{V_0^\gamma}{V_\gamma} - mg \wedge V = V_0 + Ax$$
$$F = AP_0\frac{V_0^\gamma}{(V_0+Ax)^\gamma} - mg$$

Para um α pequeno, vale a aproximação binomial $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$. Sabendo disso:

$$F = AP_0\frac{V_0^\gamma}{V_0^\gamma(1+\frac{Ax}{V_0})} - mg$$
$$F = AP_0(1-\frac{\gamma Ax}{V_0}) - mg$$

Lembre que, de i), temos que $AP_0 = mg$. Com isso, encontramos o bonito resultado:

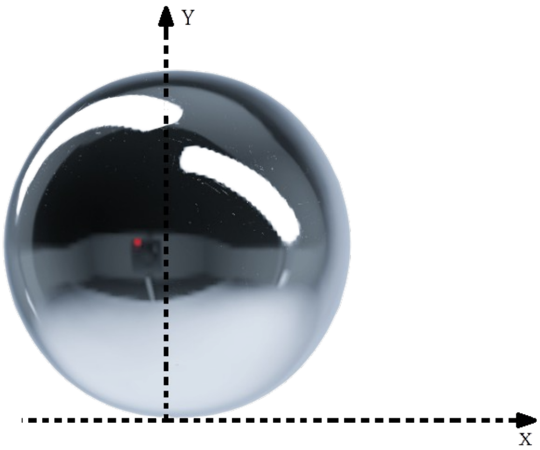
$$\boxed{F = -\frac{\gamma Ax}{V_0}}$$

Essa possui a clara formatação de uma força restauradora de MHS $F = -kx$. Sabemos que a solução desse movimento é um MHS, de período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Com isso em mãos:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{\gamma A}}}$$

Apara aí ***

"Uma bola, lançada com uma velocidade inicial v_0, move-se no plano $X - Y$ de campo gravitacional $\vec{g}$ homogêneo. Despreze o efeito do arrasto do ar.



Edfício esférico

O ponto de lançamento pode ser selecionado livremente no nível do solo Y=0, e o ângulo de lançamento pode ser ajustado conforme necessário. O objetivo é atingir o ponto mais alto de um edifício esférico de raio R (ver fig.1) com a velocidade inicial mínima. Colidir com o telhado antes de atingir o alvo não é permitido.

*Lugar Geométrico **

Encontre o lugar geométrico do movimento descrito por essa bola.

*Velocidade Mínima ****

Qual é a velocidade mínima de lançamento v_0 necessária para que a bola atinja o ponto mais alto do edifício?"

Solução:

Lugar Geométrico

$$Y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\theta) \tag{1}$$

$$X = v_0 t \cos(\theta) \Rightarrow t = \frac{X}{v_0 \cos(\theta)} \tag{2}$$

Com (2) em (1) encontramos a **equação da trajetória;**

$$Y = -\frac{g}{2}\left(\frac{X}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 + v_0 \sin(\theta)\left(\frac{X}{v_0 \cos(\theta)}\right) \Rightarrow$$

$$Y = -\frac{g(X\sec(\theta))^2}{2{v_0}^2} + X\tan(\theta)$$

Usando que $\sec(\theta)^2 = 1 + \tan(\theta)^2$:

$$-\tan(\theta)^2\frac{gX^2}{2{v_0}^2} + X\tan(\theta) - \frac{gX^2}{2{v_0}^2} - Y = 0$$

Agora, devemos analizar o Δ desta equação quadrática em $\tan(\theta)$. note que para que o movimento exista, $\Delta \geq 0$, assim:

$$X^2 - \frac{gX^2}{2{v_0}^2}\left(\frac{gX^2}{2{v_0}^2} + Y\right) \geq 0 \Rightarrow \boxed{Y \leq \frac{2{v_0}^2}{g} - \frac{gX^2}{2{v_0}^2}} \tag{3}$$

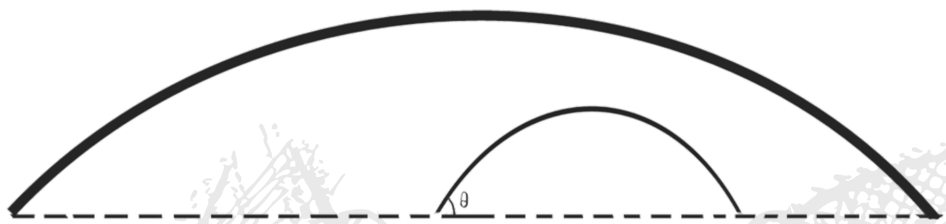


Figura 1: Lugar Géométrico

Portanto, definimos assim o L.G do movimento da bola, as fronteiras que delimitam onde não podemos encontrá-la.

Velocidade mínima

Queremos encontrar a velocidade mínima necessária para que a bola chegue ao topo. Mas note que podemos fazer o processo inverso que é referencialmente mais simples, então, é uma boa ideia que ao invés de lançarmos a bola do chão para o topo do edfício, lançamos a lançamos do topo do topo do edifício para o chão. Para isso, é importante que usemos um fato limite; a bola só tocará o edfício em um único ponto o tangenciando. Assim, podemos escrever a equação da circunferência tomando a origem como a da imagem a seguir:

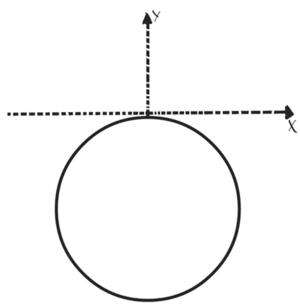


Figura 2: origem

$$X^2 + (Y + R)^2 = R^2 \tag{4}$$

juntando esta equação com a equação (3) no caso de igualdade, que é justamente o necessário para a velocidade mínima;

$$X^2 \frac{g}{2{v_1}^2} + X^2\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{{v_1}^2}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{4g} + R\right)\frac{{v_1}^2}{g} \tag{5}$$

Como a velocidade é necessariamente real e esperamos que seja única; $\Delta = 0$. Assim, a menor velocidade para lançar a bola do topo é:

$$\Delta = 0 \Rightarrow {v_1}^2 = \frac{gR}{2} \tag{6}$$

Por energia:

$${v_0}^2 = 4gR + {v_1}^2 \Rightarrow \boxed{v_0, min = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}} \tag{7}$$

Portanto encontramos a velocidade mínima.
Obs:esta foi uma das partes do problema 1 da **IPhO 2012, Estônia.**