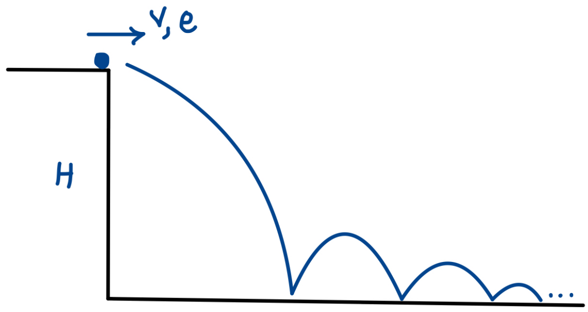
Soluções dos Problemas Semanais - 21/05

Thiago Brasileiro e Vitória Nunes

Alcance Infinito? *

Um corpo é lançado horizontalmente com velocidade **V** de uma altura **H** do solo. O coeficiente de restituição da bolinha com o solo vale **e**. Determine a distancia horizontal percorrida pelo corpo após n colisões, onde n tende ao infinito.



Solução:

Inicialmente, perceba que a força que age durante a colisão é a força de contato (normal), que age perpendicularmente ao solo, sendo portanto uma força vertical. A outra força que age na vertical é o peso da partícula. Assim, é facil ver que não há nenhuam força horizontal e a velocidade nesse eixo será tratada como **constante.**

Podemos calcular a velocidade que o corpo possui imediatamente antes da colisão usando a equação de Torriceli:

$$v_y^2 = v_0^2 + 2g\Delta y$$

A velocidade inicialmente no eixo y é nula, logo:

$$v_y = \sqrt{2gH}$$

A definição do coeficiente de restituição é:

$$e = \frac{v'_{afast}}{v'_{aprox}}$$

onde v' representa a velocidade relativa. Nesse caso, como só a bolinha se move e evidentemente o solo fica em repouso, a velocidade de aproximação é a velocidade que ele incide no solo na colisão e a velocidade de afastamento é a velocidade que o corpo deixa o solo depois da colisão. A partir de agora, definirei a notação da velocidade em função do número de colisões. Exemplo: $v_n =$ velocidade depois da n-ésima colisão.

Para a primeira colisão:

$$e = \frac{v_1}{v\ _y}$$

$$v_1 = ev_y$$

Para a segunda colisão

$$e = \frac{v_2}{v_1}$$

$$v_2 = ev_1 = e^2 v_y$$

Para a terceira colisão:

$$e = \frac{v_3}{v_2}$$

$$ev_2 = e^3 v_y$$

Assim, para a n-ésima colisão:

$$e = \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

$$ev_{n-1} = e^n v_y$$

Fazendo uma análise no eixo horizontal, podemos inferir que

$$x = v.t$$

Para o eixo vertical podemos analisar o tempo total de vôo em função do número de colisões, visto que as trajetórias descritas após cada colisão serão parábolas (lançamentos oblíquos). No ponto de maior altura, a velocidade vertical é nula e podemos escrever que:

$$0 = v_n - gt$$

$$t_{total} = \frac{2e^n v_y}{g}$$

Já que o tempo total é 2 vezes o tempo que se leva para chegar à altura máxima.

então, denominando como x_n o deslocamneto horizontal após cada colisão, podemos escrever que:

$$x_1 = \frac{2vv_y e}{g}$$

$$x_2 = \frac{2vv_y e^2}{g}$$

$$x_3 = \frac{2vv_y e^3}{g}$$

$$x_n = \frac{2vv_y e^n}{g}$$

perceba que isso é uma PG infinita, já que n tende ao infinito. Então colocando o termo comum em evidência, temos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \frac{2vv_y}{g}(e + e^2 + e^3 + \ldots)$$

Sabendo que a soma da PG infinita é dado por:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Encontramos que

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots = \frac{2vv_y}{g}(\frac{e}{1-e})$$

Pórem, antes de ocorrer a primeira colisão, o corpinho percorre uma distância x_0 dada por:

$$x_0 = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(Lembre-se que $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ é o tempo de queda.) Então, o deslocamneto total horizontal é dado por:

$$x_t = v\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2vv_y}{g}(\frac{e}{1-e})$$

Substituindo v_y por $\sqrt{2gH}$, colocando o g para dentro da raiz e colocando o termo comum em evidência, achamos que:

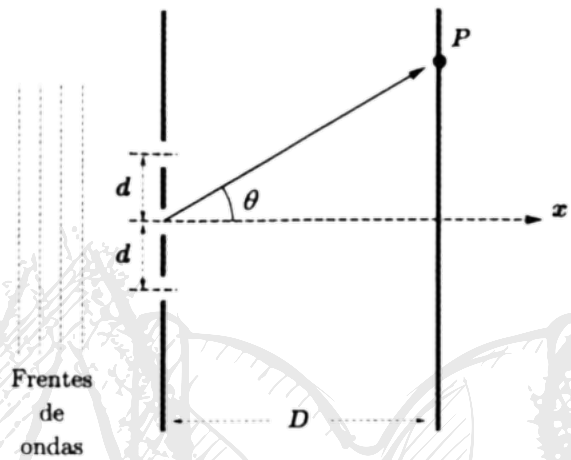
$$\boxed{x_t = v\sqrt{\frac{2H}{g}}(\frac{1+e}{1-e})}$$

Altos e Baixos da Vida **

Frentes de ondas planas de luz, de comprimento de onda λ, incidem num conjunto de três fendas, com a do centro situando-se a uma distância **d** das demais, conforme ilustra a figura. A uma distância D $\gg$ d, um anteparo registra o padrão de interferência gerado pela difração da onda devido às fendas. Calcule:

(a) A razão entre a intensidade da franja clara central e a das franjas claras vizinhas.

(b) Os ângulos θ_n para os quais ocorrem franjas escuras.



Solução:

a) Para um número de fendas maior que 2, temos a presença de máximos principais e secundários. Para máximos principais devemos ter os 3 fasores alinhados em um mesma direção e sentido e para máximos secundários devemos ter um fasor contrário ao sentido dos outros dois. Assim, para o máximo principal:

$$E_r = 3E_0$$

onde E_r é a amplitude resultante e E_0 é a amplitude inical de cada fonte.

Para máximos secundários:

$$E_r = E_0$$

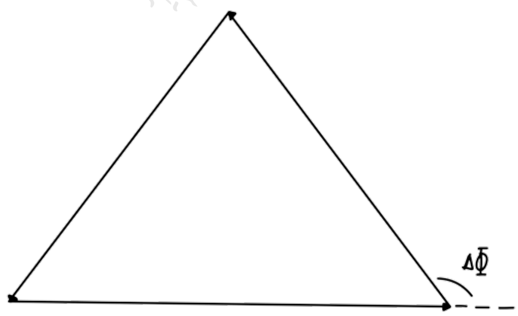
Isso se deve pelo fato de um fasor cancelar outro fasor, ja que são contrários. Lembrando que a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude podemos escrever que:

$$\frac{I_p}{I_s} = (\frac{3E_0}{E_0})^2$$

Onde I_p é a intensidade causada pelos pontos de máximo principais e I_s é a intensdade causada pelos pontos de máximos secundários. logo:

$$\boxed{\frac{I_p}{I_s} = 9}$$

b) Fazendo um breve memória da soma de vetores, quando somamos vetores e há formação de um polígono fechado sem o vetor soma resulatante estar representado, dizemos que o vetor soma resultante é nulo. Então, como queremos franjas escuras, queremos pontos de mínimo, em que a amplitude é nula. Para que a amplitude resultante seja nula é necessário que os 3 fasores façam um triângulo, que evidentemente é equilátero, já que suas amplitudes são iguais entre si e valem E_0. Assim, temos 2 configurações possíveis:



Nesse caso, a diferença de fase $\Delta\Phi$ vale $\frac{2\pi}{3}$. Devido a coerência das fontes, podemos escrever que:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

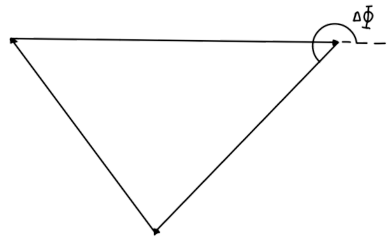
$$\Delta x = d \sin\theta$$

então, chegamos que

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{3d}$$

$$\boxed{\arcsin(\frac{\lambda}{3d})+2n\pi}$$

onde n é um número inteiro
Podemos ter o segundo caso:



Nesse caso $\Delta\Phi = \frac{4\pi}{3}$. E fazendo o processo análogo ao acima, encontraremos que

$$\boxed{\theta = \arcsin(\frac{2\lambda}{3d})+2n\pi}$$