Soluções dos Problemas Semanais - 04/06

Lucas Tavares e Gabriel Baptista

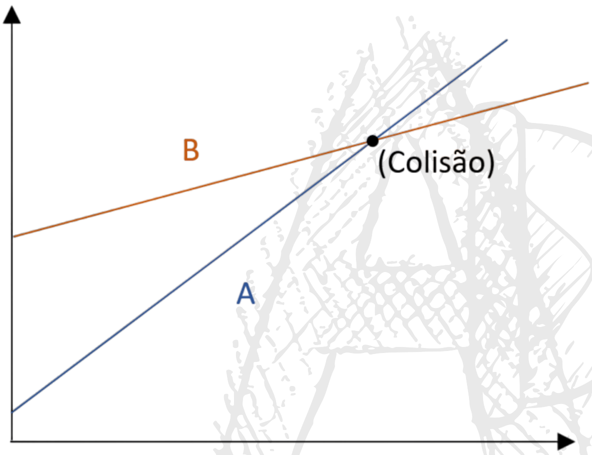
Cinemática é Trivial po *

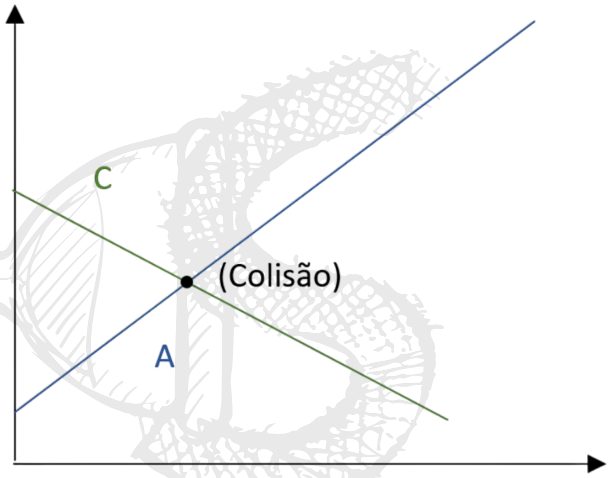
"Três partículas A, B e C se encontram em linha reta, de forma que B esteja situada entre A e C. Então, eles começam a se mover com velocidades constantes (mas diferentes), de tal forma que 1) *se C estivesse faltando, A e B se colidiriam, e que* 2) *se B estivesse faltando, então A e C se colidiriam antes de* 1). *Iriam B e C se colidir se A estivesse faltando? Explique."*

Solução:

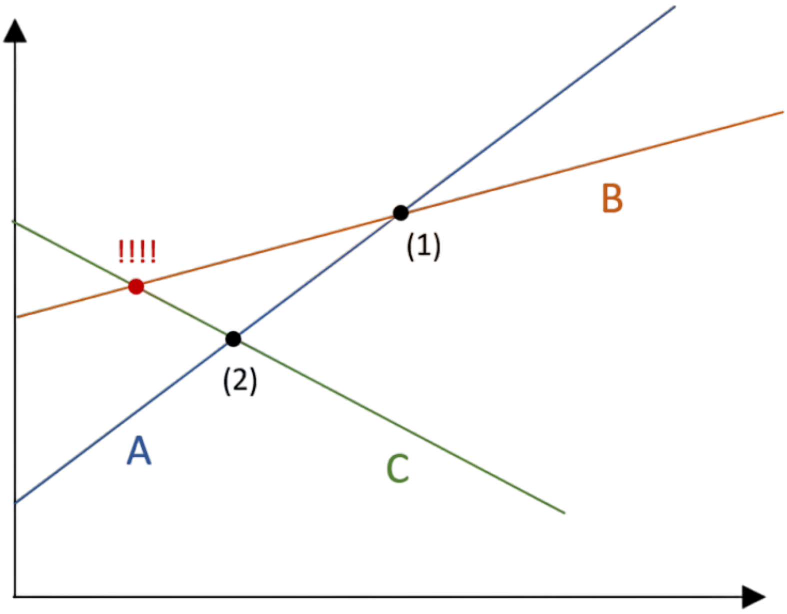
Uma forma rápida e poderosa de resolver questões desse tipo é representando as posições das partículas emfunção do tempo em um gráfico $x \times t$. Como $v = \Delta x / \Delta t = \tan \alpha$, a inclinação da reta representa a velocidade da partícula. Colisões entre partículas ocorrem quando 2 curvas de $x(t)$ se encontram em um mesmo ponto.

Portanto, o caso 1 e o caso 2 podem ser representados, respectivamente, pelos diagramas abaixo (com o eixo vertical representando a posição e o eixo horizontal representando o tempo):





Perceba que o instante em que a colisãao de 2 ocorre será antes que a de 1 se o ponto onde houver a colisão estiver mais a esquerda. Portanto, representando todas as pertículas em um mesmo diagrama, temos o seguinte:



A condição de $t_2 < t_1$ foi satisfeita, e então é possível ver que **B e C se encontram**.

Herói + Lugar**

"Um polígono regular de N lados possui cada um de seus vértices mantidos na temperatura $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ respectivamente por um agente externo. Calcule a temperatura no centro desse polígono no estado estacionário."

Solução:

Para resolver esse problema sem muitas dificuldades, vamos utilizar de uma ideia chamada superposição (Herói + Lugar).

Primeiramente vamos imaginar o que acontece com o nosso polígono no estado estacionário. Para que cada vértice possa manter uma temperatura fíxa T_x, ele deve estar associado com um reservatório térmico de mesma temperatura.

Imagine nosso polígono com cada vértice numerado na seguinte ordem: 1; 2; 3; ...; n-1 e n em cada vértice possui uma temperatura diferente, ou seja, o vértice 1 possui temperatura T_1, o vértice 2 possui temperatura T_2 e assim por diante. Nesse polígono, a temperatura no centro será T. Vamos imaginar agora um polígono similar que mantenha as mesmas propriedades dos vértices(vértice 1 possui temperatura T_1, o vértice 2 possui temperatura T_2 e assim por diante), mas que a ordem dos vértices seja dada da seguinde maneira: n; 1; 2; 3; ...; n-2 e n-1. Como os polígonos são similares, a temperatura no centro desse segundo polígono também será T.

Repetindo o mesmo processo n vezes até que todas os vértices alternem de lugar, iremos ter n polígonos iguais, em que cada vértice de determinada posição terá uma temperatura diferente.

Vamos utilizar o princípio da superposição, ou seja, vamos superpor cada polígono. Assim, no estado estacionário, cada vértice terá sua temperatura somada. Ou seja, cada vértice terá uma temperatura $T^* = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} + T_n$. O mesmo ocorrerá para o centro do polígono: $T_c = \sum T = nT$.

Como todos os vértices terão a mesma temperatura T^*, e o polígono regular possui bastante simetria, podemos afirmar que, no estado estacionário, ele possuirá uma temperatura uniforme T^*. Sendo assim, a temperatura no centro será $T_C = T^* = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} + T_n$. Logo, a temperatura $T = T_c/n$ será dado por:

$$\boxed{T = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} + T_n}{n}}$$

Modelando uma câmera ***

"Com uma câmera de celular, um fotógrafo localiza sua câmera a uma distância L e tira uma foto. Na fotografia, todos os objetos muito afastados (localizados no infinito) são bem definidos. Além disso, todos os objetos com distâncias, até a lente, maiores que s também são projetados e são bem definidos na imagem. A distância L é chamada, no meio da fotografia, de distância hiperfocal".

a) *Qual o mínimo valor de L?*

b) *Encontre o valor correspondente de s*

Dados:

- *Considere que para a imagem de um objeto pontual ser registrada pelo sensor, a mesma deve ser menor do que um pixel no sensor. Caso contrário, a imagem é indistinta;*
- *A lente da câmera pode ser visto como uma lente convexa e seu foco é ajustado pelo deslocamento da lente;*
- *A distância focal da lente é* $f = 4,3$ mm*;*
- *O diâmetro da lente é* $D = 1,8$ mm*;*
- *O sensor é* $\mu = 4,6$ mm *de largura correspondete a* $N = 3264$ *pixels;*
- *Quando necessário, utilize a aproximação* $(1+x)^n \approx 1 + nx$*;*
- *Considere a distância L muito maior que o foco da lente.*

Solução:

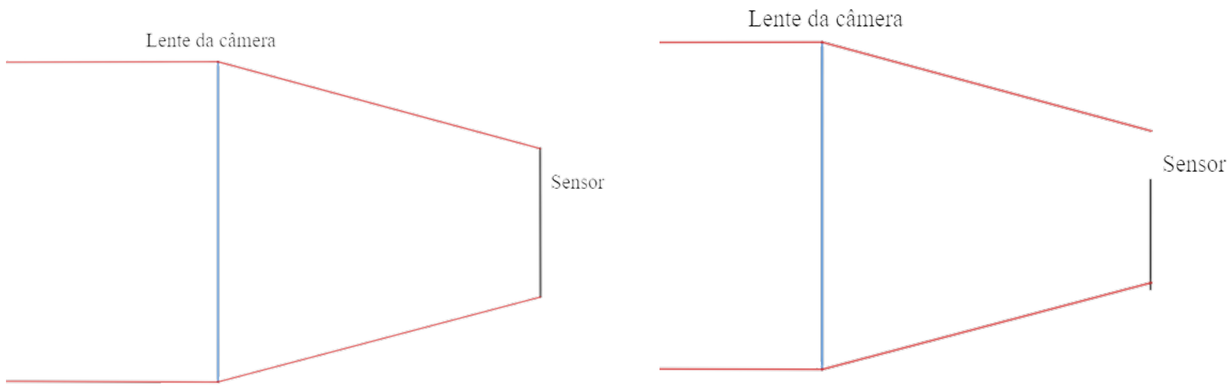
Para resolver esse problema, é essencial entender o funcionamento de um pixel e a formação de uma imagem digital. O pixel no sensor é basicamente um pequeno quadrado que, quando a luz chega até ele, a mesma é detectada. Para que a imagem seja formada nitidamente, os raios de luz que caracterizam o objeto devem estar todos dentro do sensor, como na figura (a). Caso algum raio de luz esteja fora do sensor, como na figura (b), a imagem estará desfocada.

Calculando a largura do píxel, h:

$$Nh = \mu$$

$$h = \frac{\mu}{N}$$

Para a distância mínima, L, os raios de luz da imagem deve cobrir totalmente o sensor.



(a) (b)

Figura 1: Demonstração do sensor.

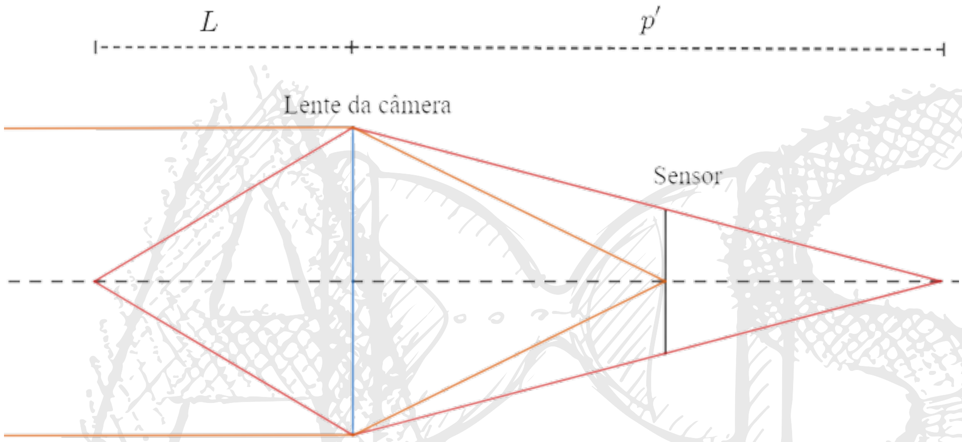


Figura 2: Formação de imagem para L_{min}

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{p'}{D} = \frac{p'-f}{h}$$

$$p' = \frac{f}{1-\dfrac{h}{D}}$$

Relacionando p' e L:

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Substituindo p':

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{f} - \frac{1-\dfrac{h}{D}}{f}$$

Assim:

$$\boxed{L = \frac{fND}{\mu} \approx 5{,}5\ \mathrm{m}}$$

Assim, para uma distância menor que L, a imagem não será focada.

Para a distância s, tudo que estiver a sua frente será bem definido. Perceba, então, que s deverá ser menor que L, visto que já calculamos um valor mínimo de L. Mas, analisando a formação da imagem, uma distância menor que L_{min} formaria uma imagem borrada. Portanto, a imagem formada por s deve estar entre f e L_{min}. Sendo assim,com essas informações, podemos compreender que o foco está antes do sensor, assim como mostra na figura

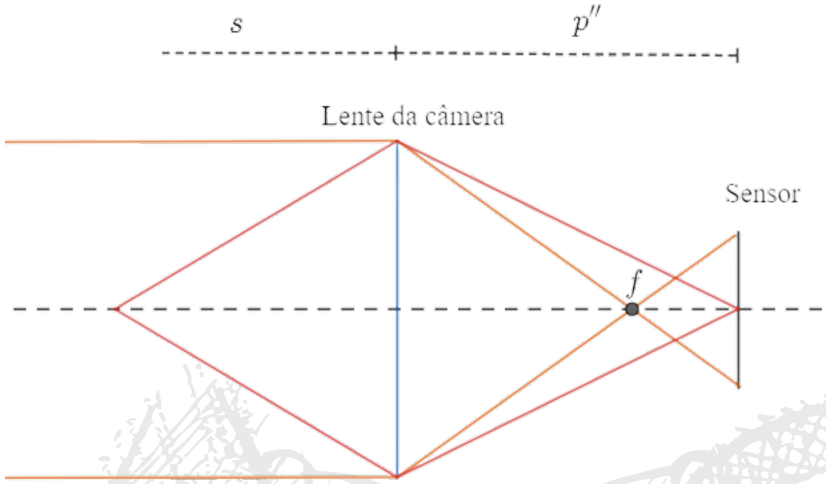


Figura 3: Imagem formada para s

Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{2f}{D} = \frac{2(p''-f)}{h}$$

$$p'' = f\left(1+\frac{h}{D}\right)$$

Porém:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p''}$$

$$s = \frac{f\left(1+\frac{h}{D}\right)}{\frac{h}{D}}$$

Como $h \ll D$:

$$\boxed{s \approx \frac{fD}{h} = 5,5\,\mathrm{m}}$$