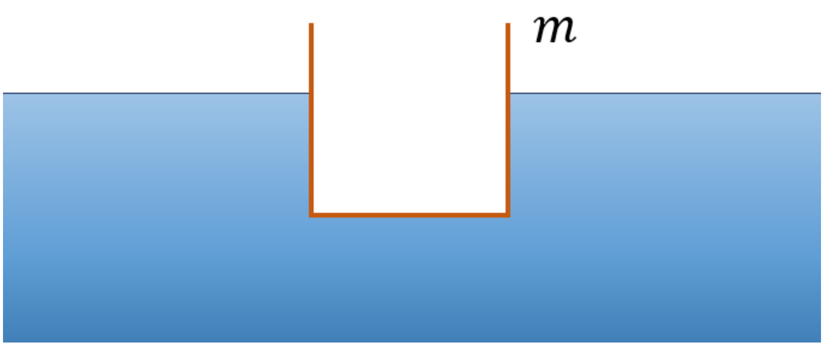
Soluções - Problemas Semanais - 28/05

Gabriel Baptista e Gustavo Valente

Bó flutuar *

"Em uma piscina infinitamente grande, coloca-se um recipiente de massa m feito de madeira. Inicialmente, o recipiente flutua com $\eta_0\%$ do seu volume submerso. Quanto de massa devemos adicionar ao recipiente para que a água da piscina fique na iminência de adentrá-lo?"



Solução:

Para a situação de equilíbrio inicial, o peso do recipiente contrabalanceia a força do empuxo causado pela água, dessa forma podemos escrever a seguinte igualdade:

$$mg = \rho g(\eta_0\% V) \Rightarrow \rho V = \frac{m}{\eta_0\%}$$

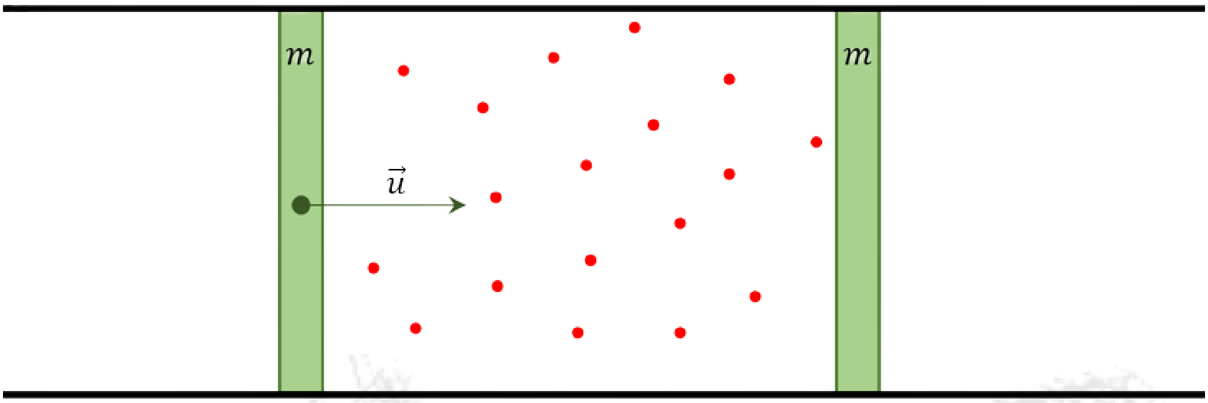
Para o equilíbrio da situação seguinte, o peso total dass massas irá novamente equilibrar o empuxo da água:

$$(\Delta m + m)g = \rho g V \Rightarrow \Delta m + m = \frac{m}{\eta_0\%}$$

$$\therefore \boxed{\Delta m = m\left(\frac{1}{\eta_0\%} - 1\right)}$$

Bicuda no pistão **

"Em um longo tubo (isolante), podem deslizar livremente e sem atrito dois pistões (também isolantes): A e B, ambos de massa m. Entre eles, há n mols de um gás monoatômico. De repente, um jovem indivíduo chuta um dos pistões em direção ao outro, atribuindo-lhe uma velocidade inicial de u. Qual a máxima variação de temperatura sofrida pelo gás durante o movimento que virá a seguir?"



Solução:

Depois do pistão ser empurrado, ele se deslocará em direção ao outro, o que comprimirá o gás e aumentará sua temperatura. Podemos resolver essa questão de forma simples através de 2 equações: a conservação do momento mecânico dos pistões; e a conservação da energia total do sistema. Pela conservação do momento:

$$mv_1 + mv_2 = mu \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = u^2 - 2v_1v_2$$

E pela conservação da energia:

$$\frac{1}{2}mu^2 + U_{inicial}^{gás} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + U_{final}^{gás}$$

Rearranjando as equações e substituindo uma na outra, obtemos o seguinte:

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2}m(u^2 - 2v_1v_2) = \frac{1}{2}mu^2 - \Delta U$$
$$\Delta U = n(3R/2)\Delta T = mv_1v_2$$

Portanto, a variação de temperatura depende do produto entre v_1 e v_2. Para que a variação seja máxima, então esse produto também precisa ser máximo, o que ocorrerá quando as velocidades dos dois pistões foram ambas iguais a $u/2$ (facilmente provado derivando e conservação do momento mecânico e aplicando a regra da cadeia no produto v_1v_2). Portanto:

$$\frac{3}{2}nR\Delta T_{máx} = \frac{mu^2}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta T_{máx} = \frac{mu^2}{6nR}}$$

Planeta estranho e falta de CNH intergalático ***

Parte A: Mais uma pedra no caminho do que duas nos rins...

"Caranguejo, um aventureiro brincalhão, está chegando num planeta recém-descoberto por ele para explorá-lo, colonizá-lo, e trazer a liberdade petrolífera do capitalismo.

Momentos antes de sua chegada, Caranguejo se deparou com um obstáculo, um planeta gasoso. Chegando com velocidade v_0, do infinito, com parâmetro de impacto b, se aproximando do planeta com raio R e massa M, encontre a componente da velocidade radial da nave de Caranguejo logo após o impacto com o planeta."

Parte B: Atmosfera magnética

"Felizmente, Caranguejo se safou de mais uma furada, e agora estava mais perto do que nunca de Xinkargow, seu destino final. Ao começar a adentrar na extensa atmosfera do planeta, Caranguejo percebeu a presença de um forte campo magnético tentando o puxar para o planeta. Ao notar isso, Caranguejo ativou uma função em sua nave, que o colocou numa velocidade de 0.6c (no referencial do planeta) no sentido oposto, e deu propriedades magnéticas de um fio infinito para sua nave. Considerando que todo o conjunto atmosfera-planeta, possui carga Q, raio R, e massa M, Determine a força magnética exercida em Caranguejo logo após ele começar sua queda magnética no planeta."

Dados: Campo magnético na componente vertical: B_y

Parte C: Milagres acontecem

"Ao atingir o solo, Caranguejo assustado, porém aliviado, percebeu que ainda estava vivo. Ao perceber este fato tão mocado, ele começou a se perguntar como aquilo poderia ter ocorrido.

A explicação dada por Caranguejo é de que existe uma região com propriedades super-condutivas quase ideais, e que essa região gerava um campo oposto ao campo repelindo sua nave, gerando também um vetor velocidade na direção oposta, freiando sua nave.

Calcule então, o campo magnético nesse meio, e uma equação que descreva a distância que um corpo precisa ter do solo para ser freado pela região."

Considere a nave de Caranguejo esférica, e de raio a.

Dados:

- *Permeabilidade magnética do meio anterior* = μ
- *Permeabilidade magnética do meio super-condutor* = μ'
- *Permissividade elétrica no meio anterior* = ε
- *Permissividade elétrica no meio super-condutor* = ε'

Solução

Parte A

Para resolver esse item, podemos começar com a ideia de conservação de momento angular na perpendicular do vetor velocidade:

$L_0 = L_f$

Então, já que não existe nenhuma influência(ainda) do campo magnético na nave, podemos conservar a energia do sistema:

$\frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GMM}{R} + \frac{mv_f^2}{2}$

$v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R}}$

Com isso, podemos explorar a conservação do momento angular do sistema:

mv_0b = m$v_f$sin θR

Sendo θ o ângulo que o vetor velocidade faz com a linha radial do planeta.

Podemos então isolar θ da equação e encontrar que:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{b}{R.\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2GM}{v_0^2R}}}}}\right)$$

Com isso, podemos substituir theta na conservação de momento, obter o valor de v_f, e assim obter a componente radial desta velocidade:

$$\frac{v_0 b}{\sin\left(arcsin\frac{b}{R\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2GM}{v_0^2R}}}}}\right)} = v_f$$

Mas a componente radial será: $v_f \cos\theta$, então:

$$\boxed{v_r = \frac{v_0 b}{R} cotan\left(arcsin\frac{b}{R\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2GM}{v_0^2R}}}}}\right)}$$

Parte B

Para resolver essa parte, teremos que fazer correções relativísitas, devido a altíssima velocidade de caranguejo.

Primeiro podemos começar corrigindo o campo magnético. Se o campo está atraindo o corpo para o planeta, podemos pensar que o mesmo estará agindo na mesma direção que a gravidade. Fazendo este breve paralelo, podemos perceber que a direção do campo que efetivamente atrai a nave, é a direção em y, logo, devemos efetuar transformações de lorentz para o campo:

$$B_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z)$$

Aqui já podemos notar que precisaremos do valor do fator de Lorentz, e do valor do campo elétrico. Podemos obter o mesmo pela lei de Gauss:

$$\oint \vec{E}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} \therefore \vec{E} = \frac{KQq}{d^2}.$$

Podemos definir um ângulo que o eixo vertical faz com o vetor posição de caranguejo:

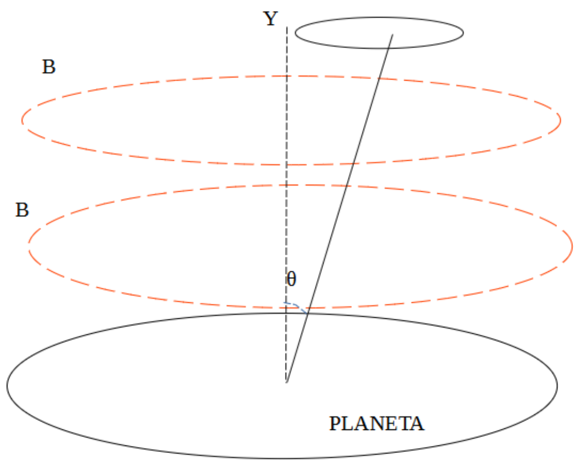


Figura 1: Caption

Sabemos que o campo magético deve ser perpendicular ao elétrico, logo podemos decompor o campo elétrico em qualquer componente.
Logo, teremos que:
$E_y = \frac{KQq}{d^2}\cos\theta\sin\theta$
Também é facil ver que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1.25$$

Logo, podemos escrever o campo magnético corrigido como:

$$B'_y = 1.25(B_y + \frac{KQq0.6}{d^2c}\cos\theta\sin\theta)$$

Mas, sabemos que $F = qVB$, e $v = 0.6c$(no referencial do planeta), logo:

$$\boxed{\mathrm{F}_m = q.0.6c[1.25(B_y + \frac{KQq0.6}{d^2c}\cos\theta\sin\theta)]}$$

Parte C

A parte C é a mais complicada do problema. Nela, exloraremos sua capacidade de realizar analogias com problemas conhecidos, e seu conhecimento sobre magnetismo na matéria.

Para definir a distância mínima que esse campo consegue frear, precisamos entender o que está acontecendo.
Como a nave está caindo num meio condutor não-ideal, o campo nunca será totalmente zerado, até porque a nave, nestas condições é um dipolo, então, pela regra da mão direita, é facil ver que o que estará fazendo o papel de desacelerar a nave é o perfil quase-supercondutor da atmosfera, que sempre vai tentar gerar um campo oposto ao gerado pela nave-planeta, gerando assim, um vetor velocidade oposto.
Para analisar quantitativamente essa capcidade de "parar"a nave, precisamos perceber, que há uma mudança de meios durante o processo, logo o campo será alterado:

Pelas condições de contorno:

$$\frac{B'_y}{\mu_0} = \frac{B''_y}{\mu}$$
$$\mathrm{B}''_y = \frac{B'_y}{\mu_0}\mu$$

Agora que temos o valor do campo magnético nesse meio, poderemos começar a analisar a situação.
Para ter um melhor entendimento, podemos pensar nisso como uma interface/circuito fio-condutor
Nosso objetivo nesse circuito é que a corrente tenda a 0 no instante em que a nave está próxima do solo.
Quando a corrente se anula, a força magnética sobre a nave é zero, o que resulta na máxima desaceleração.

Para determinar a distância máxima de frenagem, consideramos o momento em que a corrente no circuito se anula. Nesse momento, a força magnética total sobre a nave é igual à força gravitacional:

$$F_m = F_g$$

Utilizando a expressão da força magnética obtida anteriormente:

$$q \cdot 0.6c \left[1.25 \left(B''_y + \frac{KQq0.6}{d^2c} \cos\theta \sin\theta\right)\right] = mg$$

Isolando a distância d, temos:

$$d = \sqrt{\frac{KQq^2}{1.25mgc^2 \cos\theta \sin\theta \left(\frac{B'_y}{\mu_0}\mu\right)}}$$

Logo, chegamos numa equação em que representa o d mínimo que faz a nave parar. (Primeira tendência a infinito de d).