Cálculo financeiro e aplicações

João Antônio Pimentel

1 Introdução

O cálculo financeiro é uma área fundamental das finanças que permite que as empresas e indivíduos tomem decisões financeiras informadas e estratégicas. Através da aplicação de técnicas e ferramentas matemáticas, é possível analisar e gerenciar riscos financeiros, avaliar investimentos e calcular juros e retornos.

Este material tem como objetivo fornecer uma visão geral das principais ferramentas do cálculo financeiro, bem como suas aplicações em diferentes setores. Através da leitura deste material, você irá entender como essas técnicas podem ser aplicadas para tomar decisões financeiras informadas e estratégicas, tanto em nível empresarial quanto pessoal.

2 Juros simples

Os juros simples são um tipo de juros que são calculados apenas sobre o valor principal de um empréstimo ou investimento. Eles são expressos como uma porcentagem do valor principal e são pagos em intervalos regulares durante o período do empréstimo ou investimento. os juros simples não são amplamente utilizados na prática financeira, pois não levam em conta a capitalizaçmuão dos juros, assim, caso os bancos utilizassem os juros simples iriam ganhar menos do que o esperado. Lembre-se, o banco sempre irá querer maximizar seus ganhos, então aplicar os juros simples não é uma boa escolha para eles.

O montante é o valor acumulado da operação, ou seja, representa a soma do principal mais os juros calculados durante determinado período, ele pode ser dado por:

$$M = C + J \tag{1}$$

Onde M é o montante, C é o capital inicial e J é o valor dos juros de uma operação.

Para calcular o juros simples de uma operação com uma taxa de juros i por mês por um período de n meses, basta multiplicarmos o capital inicial pelo produto $i \cdot n$. Assim:

$$J = C \cdot i \cdot n \tag{2}$$

Substituindo a equação 2 em 1

$$M = C + (C \cdot i \cdot n) = C \cdot (1 + i \cdot n) \tag{3}$$

2.1 Taxa nominal e taxa proporcional

A taxa nominal é a taxa contratada ou declarada em uma operação financeira. Por exemplo, se um banco lhe oferece um fundo de investimento que remunera 15% ao ano, esta é a taxa nominal. A taxa nominal não corresponde, necessariamente a taxa de juros efetiva, em razão da existência de várias outras obrigações fiscais, como os impostos sobre operações financeiras e do critério linear sobre juros períodicos.

Suponha que temos uma taxa de juros de 3% ao mês e 36% ao ano, no sistema de capitalização linear (juros simples), essas taxas são chamadas de proporcionais por expressarem valores iguais em quaisquer que sejam as unidades de tempo definidas

3 Juros compostos

Os juros compostos são amplamentes utilizados nos sistemas bancários, pois atuam no sistema "juros sobre juros". Isso faz com que a taxa de juros seja aplicada sobre um valor cada vez maior, gerando um crescimento exponencial do montante.

Por exemplo, imagine que um indivíduo tenha investido 1.000 reais em uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Seja PV, o valor presente e FV o valor futuro, tem-se os seguintes resultados no final de cada período.

Primeiro mês:

$$FV = 1.000 \cdot (1 + 20\%) = 1000 \cdot (1,02)$$

Segundo mês:

$$FV = 1000 \cdot (1,02) \cdot (1 + 20\%) = 1000 \cdot (1,02)^2$$

Terceiro mês:

$$FV = 1000 \cdot (1,02)^2 \cdot (1 + 20\%) = 1000 \cdot (1,02)^3$$

N - ésimo mês:

$$FV = 1000 \cdot (1,02)^{n-1} \cdot (1 + 20\%) = 1000 \cdot (1,02)^n$$

Assim, a fórmula que nos dá o montante em um regime de juros compostos é da forma:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \tag{4}$$

3.1 Taxa equivalente e taxa efetiva

Taxas equivalentes são aquelas que geram montantes iguais quando capitalizadas sobre um mesmo capital e prazo. Por exemplo, 20% a.s. e 44% a.a. são equivalentes por produzirem o mesmo montante em prazo idêntico, ou seja, é indiferente a um investidor aplicar um mesmo capital à taxa de 20% a.s. ou 44% a.a.

Para calcular a taxa de juros equivalentes utilizamos a seguinte expressão:

$$i_q = (1 + i)^{\frac{1}{q}} - 1 \tag{5}$$

Onde i é a taxa de juros e q é o número de parte do intervalo de tempo considerado.

Para exemplificar melhor, vamos usar o exemplo anterior, um ano possui dois semestres, assim q = 2, a taxa de juros original é 44%, então a taxa de juros equivalente em semestres é:

$$i_2 = (1 + 0,44)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,2 = 20\%\ a.s \tag{6}$$

se a capitalização for processada pelo critério de juros simples (taxa nominal, conforme definida), a taxa de juros calculada ao final do período (taxa efetiva) será maior que a taxa contratada. A identidade de cálculo da taxa efetiva de qualquer operação, quando o prazo de capitalização não coincidir com o prazo definido pela taxa contratada e os juros forem distribuídos de forma proporcional nos períodos de capitalização, pode ser expressa da seguinte maneira

$$i_e = (1 + \frac{i}{z})^z - 1 \tag{7}$$

Sendo z o número de períodos de capitalização da taxa contratada em determinado período de tempo.

Então, por exemplo, se eu quiser determinar o montante de uma aplicação de 10.000 reais, efetuada pelo prazo de um ano a uma taxa de juros de 10% a.a, capitalizados trimestralmente.

Por um lado, convencionando-se que a capitalização se processa de forma proporcional à taxa nominal, tem-se o seguinte montante:

$$FV = 10.000 \cdot (1 + \frac{0,1}{4})^4 = R\$\ 11.038,12$$

Por outro lado, ao admitir que a capitalização seja feita pelo uso da taxa trimestral equivalente composta, a taxa efetiva anual coincidirá, como é natural, com a taxa de juros definida para a operação de 10%. Os resultados dessa operação são:

$$i_q = \sqrt[4]{1+0,1} - 1 = 2,411\%\ a.t$$

$$FV = 10.000 \cdot (1,02411)^4 = R\$\ 11.000,00$$

3.2 Séries de pagamentos ou recebimentos não uniformes

Se os valores de pagamento ou recebimento de uma operação não forem consistentes em termos de valor ou frequência, o valor presente (PV) pode ser calculado somando-se o valor atualizado de cada fluxo de caixa no momento presente. Assim:

$$PV = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j} \tag{8}$$

Sendo CF$_j$ o fluxo de caixa a ser recebido ou pago no período j. Por exemplo, o valor presente de uma dívida que deve ser paga em três parcelas mensais consecutivas de R$ 100.000,00, R$ 150.000,00 e R$ 200.000,00, respectivamente, à taxa de 1,2% a.m., é:

$$PV = \frac{100.000}{1,012} + \frac{150.000}{1,012^2} + \frac{200.000}{1,012^3} = R\$\ 438.247,41$$

Por outro lado, a identidade do valor futuro (montante) para uma série de pagamentos ou recebimentos não uniformes pode ser expressa da seguinte maneira:

$$FV = \sum_{j=1}^{n} CF_j \cdot (1+i)^j \tag{9}$$

3.3 Série de pagamentos ou recebimentos uniformes

Se os valores de pagamentos ou recebimentos de uma operação forem consistentes, ou seja, serem iguais em todos os períodos, o cálculo do valor presente é simplificado pelo uso da seguinte fórmula:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{10}$$

Onde PMT é o valor de cada pagamento ou recebimento.

Por exemplo, o valor presente de um bem que é pago em 10 prestações mensais e iguais de R$ 5.000,00, à taxa de juros de 2,0% a.m., é:

$$PV = 5.000 \cdot \frac{1-(1+0,02)^{-10}}{0,02} = R\$\ 44.912,33$$

Em contrapartida, o valor futuro de uma série uniforme é dado por:

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{11}$$

Exemplificando, vamos encontrar o valor futuro (montante) do exemplo anterior:

$$FV = 5.000 \cdot \frac{(1+0,02)^{10} - 1}{0,02} = R\$\ 54.748,60$$

3.4 Anuidades perpétuas

Anuidade perpétua é um tipo de investimento em que uma quantia fixa de dinheiro é paga ou recebida em intervalos regulares, para sempre. Em outras palavras, é um fluxo de caixa que nunca acaba.

Na prática, a anuidade perpétua é uma série infinita de pagamentos ou recebimentos iguais, que ocorrem em intervalos regulares, como mensalmente, trimestralmente ou anualmente. O valor desses pagamentos pode ser fixo ou variável. Um exemplo de anuidade perpétua é uma aposentadoria paga pelo governo a um cidadão por toda a sua vida. O governo paga um valor fixo todo mês, independentemente de quanto tempo a pessoa viver.

Assim, o valor presente (PV), pode ser calculado através da equação 8.

$$PV = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{CF_j}{(1+i)^j} = \frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \ldots$$

Como o fluxo de caixa é regular, ou seja, é uniforme, podemos substituir os fluxos de caixa pelo valor das prestações que devem ser pagar ou recebidas (PMT).

$$PV = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{PMT}{(1+i)^j} = \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \ldots$$

Perceba que podemos colocar PMT em evidência.

$$PV = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{PMT}{(1+i)^j} = PMT \cdot (\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots)$$

Veja que formamos uma P.G infinita de razão $\frac{1}{1+i}$, como a razão dessa P.G está entre -1 e 1, podemos aplicar a soma da P.G infinita.

$$PV = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{PMT}{(1+i)^j} = PMT \cdot (\frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}) = PMT \cdot \frac{1}{i}$$

Assim, conseguimos deduzir que o valor presente em um regime perpétuo é

$$PV = \frac{PMT}{i} \tag{12}$$

Mas e se considerarmos um fluxo de caixa com taxa de crescimento constante (g)?

Como o fluxo de caixa crescerá em regime de juros compostos podemos observar que

$$PV = \frac{PMT \cdot (1+g)}{1+i} + \frac{PMT \cdot (1+g)^2}{(1+i)^2} + \frac{PMT \cdot (1+g)^3}{(1+i)^3} + \ldots$$

Utilizando o mesmo raciocínio da demonstração anterior, pode-se concluir que:

$$PV = \frac{PMT}{i-g} \tag{13}$$

4 Capitalização contínua

A capitalização contínua é uma capitalização infinitamente grande, que ocorre a cada intervalo infinitesinal. Ela explica melhor o comportamento de uma carteira de investimento, por exemplo, que produz diversos rendimentos de forma contínua.

Um exemplo de capitalização contínua é um fundo de investimento composto por inúmeros ativos, que pagam rendimentos (juros e dividendos) em intervalos pequenos de tempo. Cada título remunera o investidor em uma data diferente, sendo os retornos aplicados novamente. Como o fundo possui uma grande quantidade de títulos, há um fluxo de rendimentos ocorrendo continuamente (todo dia, por exemplo), o que leva a uma capitalização em intervalos de tempo cada vez menores.

Para deduzir as relações entre valor presente e valor futuro no regime de capitalização contínua é necessário fazer o uso do conceito de limites, o que pode ser algo que você não viu ainda no ensino médio, mas não se preocupe, isso não é necessário para a OBECON ou para as outras olimpíadas nacionais que envolvem economia e matemática financeira.

Sabemos que o valor futuro em um regime de juros compostos também pode ser escrito como, porém na maioria das vezes consideramos que n = 1, visto que em uma capitalização discreta, ou seja, a diferente da contínua, o valor é capitalizado uma única vez no período t :

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{I}{n}\right)^{nt}$$

Sendo n o número de vezes que o valor é capitalizado no período t e t o tempo total. Quando n vai para o infinito temos:

$$FV = \lim_{n\to\infty} PV \cdot \left(1 + \frac{I}{n}\right)^{nt}$$

Perceba que podemos ignorar as váriaveis constantes para determinar o valor do limite, veja que PV é constante e t é constante, assim só precisamos calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{I}{n}\right)^{n}$$

Seja a expansão binominal dada por:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \left(\frac{n(n-1)}{2!}\right)a^{n-2}b^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right)a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Aplicando a expansão à expressão desejada

$$\left(1+\frac{I}{n}\right)^n = 1 + I + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{I}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{I}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n^n}\frac{I}{n!}$$

Quando n $\to \infty$

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = 1 + I + \frac{I}{2!} + \frac{I}{3!} + \ldots + \frac{I}{n!} = e^i$$

Assim, o valor futuro de um investimento realizado em regime de capitalização contínua é:

$$FV = PV \cdot e^{I \cdot n} \tag{14}$$

Sendo e o número de neper (e = 2,7182...), I a taxa de juros instantânea e n o número de vezes que o capital é capitalizado no período t.

4.1 Relação entre as taxas de juros

Para encontrar uma relação entre as taxas de juros basta igualarmos os valores futuros em cada regime de capitalização.

Na capitalização discreta:

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$

Na capitalização contínua:

$$FV = PV \cdot e^{I \cdot n}$$

Igualando as duas expressões temos:

$$PV \cdot (1+i)^n = PV \cdot e^{I \cdot n} \Rightarrow (1+i)^n = e^{I \cdot n}$$

Assim:

$$(1+i) = e^I \Rightarrow I = ln(1+i)$$

$$I = ln(1+i) \tag{15}$$

A taxa efetiva na capitalização contínua é dada de acordo com a seguinte expressão:

$$I_e = e^i - 1 \tag{16}$$

Sendo i a taxa nominal de juros

5 A importância da representatividade dos dados financeiros em ambientes inflacionários.

Suponha que você possua uma empresa que atua em uma economia com taxa de inflação de 10% a.a. Você decide realizar uma avaliação na evolução das vendas de sua empresa, que no ano de 2021 atingiu R$ 8.000.000,00 e em 2022 atingiu R$ 8.500.000,00. Em um primeiro instante você pode pensar que o valor de suas vendas aumentou 6,25%, mas perceba que a inflação aumentou 10% de 2021 para 2022, ou seja, o nível geral dos preços aumentou em 10%. Então, em 2022, 8.500.000 reais não possuem o mesmo poder de compra do que em 2021, para calcularmos quanto 8.500.000

valeriam em 2021, basta dividirmos este valor por 1 + i = 1,1. Assim, em 2021, 8.500.000 valeriam 7.727.272,73 reais, ou seja, não houve um aumento no número de vendas, na verdade um houve uma redução de -3,4% nas vendas da empresa.

5.1 Taxa de desvalorização da moeda

A taxa de desvalorização da moeda (TDM) pode ser entendida como o decréscimo do poder aquisitivo ou poder de compra que um indivíduo possuo. A taxa de desvalorização da moeda pode ser calculada a partir do índice de preços.

$$TDM = \frac{INF}{1+INF} \tag{17}$$

Utilizando o exemplo anterior podemos calcular a TDM.

$$TDM = \frac{10\%}{1+10\%} = 50\%$$

Ou seja, o poder de compra de um indivíduo vivendo naquela sociedade decresceu 50%. Quanto maior a inflação, maior será a taxa de desvalorização da moeda.

5.2 Taxa real

A taxa real, no contexto econômico, é uma medida que leva em consideração a inflação para calcular o valor real de uma taxa de juros ou de retorno financeiro.

Diferentemente da taxa nominal que é aquela que é explicitamente acordada em um contrato ou instrumento financeiro, sem levar em conta a inflação, a taxa real leva em conta a inflação e representa o retorno efetivo do investimento, descontando a perda do poder de compra causada pela inflação.

Assim, indicando-se por r a taxa real, por INF, conforme foi visto, a taxa de inflação, e por i a taxa nominal, obtém-se a seguinte identidade de cálculo:

$$1+i = (1+INF)(1+r) \tag{18}$$

Por exemplo, se um investimento tem uma taxa nominal de 10% ao ano e a inflação do mesmo período foi de 5%, a taxa real desse investimento seria de aproximadamente 4,76% ao ano (calculada como (1+0,1)/(1+0,05)-1). Essa é a taxa que efetivamente representa o retorno real do investimento, descontando o impacto da inflação.

Podemos manusear a equação 18 com o objetivo de isolar o termo de taxa real:

$$r = \frac{(1+i)}{(1+INF)} - 1 \tag{19}$$

6 Conclusão

Em conclusão, o conhecimento de cálculos financeiros e suas aplicações é fundamental para quem deseja tomar decisões financeiras informadas e eficazes. A compreensão de conceitos como juros simples, juros compostos, valor presente e valor futuro são essenciais para a avaliação de investimentos e empréstimos.

Além disso, o entendimento de como aplicar esses cálculos em situações reais, como na escolha de investimentos ou na avaliação de empréstimos, pode ajudar a maximizar o retorno financeiro e minimizar os riscos envolvidos.

Por isso, é importante dedicar tempo para aprender e aprimorar suas habilidades em cálculos financeiros e aplicações. Com um conhecimento sólido em finanças e investimentos, é possível tomar decisões financeiras mais informadas e alcançar seus objetivos financeiros de maneira mais eficaz. Boa sorte nos seus estudos, aluno olímpico!