# Soluções Simulado OBF - Fase 2 Nível 2

**Autores: Gabriel Baptista e Mychel Segrini**

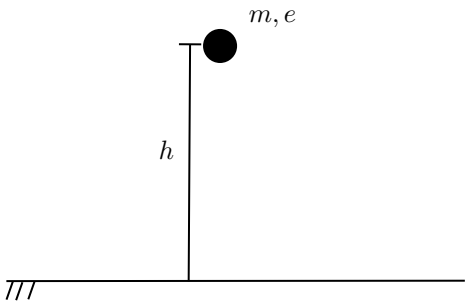
Tabela de Constantes

| **Constante** | **Valor** |
|---|---|
| Velocidade da Luz ($c$) | $299.792.458\,\mathrm{m/s}$ |
| Constante de Planck ($h$) | $6,62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ |
| Constante Gravitacional ($G$) | $6,67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ |
| Carga do Elétron ($e$) | $1,602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ |
| Constante de Boltzmann ($k$) | $1,380649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ |
| Número de Avogadro ($N_A$) | $6,02214076 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ |
| Constante de Rydberg ($R_\infty$) | $1,097373 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$ |
| Raio do Sol | $696.340\,\mathrm{km}$ |
| Calor Latente da Água | $334.000\,\mathrm{J/kg}$ |
| Calor Sensível da Água | $4.186\,\mathrm{J/g \cdot K}$ |
| Coeficiente de Expansão Linear do Alumínio ($\alpha$) | $23,1 \times 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$ |
| Temperatura de Fusão do Alumínio | $660,32\,^\circ\mathrm{C}$ |
| Constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma$) | $5,670374419 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$ |
| Massa do Sol | $2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ |
| 1 Ano luz | $9.5 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$ |

**Questão 1.**(Exclusiva para alunos do 1o ano) Uma bola de massa $m$ é solta a uma altura $h$ do chão. Sabendo que seu coeficiente de restituição $e = 0,5$.

(a) Calcule a altura máxima da bola depois da quarta colisão.

(b) Encontre o tempo até que a bola atinja repouso.




**Solução:**

Da colisão, temos: $e = \frac{|V_{af}|}{|V_{ap}|}$ que pelo dado da questão, vale $0,5$. Portanto; $|V_{af}| = 0,5|V_{ap}|$.

Isto é, a cada colisão, a velocidade de lançamento para cima é metade da velocidade de chegada da bola imediatamente antes da colisão, o que é equivalente a comparar a velocidade inicial da N-ésima colisão com a da (N+1)-ésima colisão. Em notação de recorrência para $n \geqslant 2$:

$$V_n = \frac{1}{2}V_{n-1}$$

Que configura uma P.G. Portanto:

$$\boxed{V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_1}$$

Podemos encontrar por torricelli:

$${V_1}^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{2gh}}$$

Análogamente, para N-ésima colisão:

$${V_n}^2 = 2gh_n \Rightarrow V_n = \sqrt{2gh_n}$$

**OBS:** Aqui, o índice $n$ em $h_n$ refere-se a altura máxima **antes** da N-ésima colisão. Com o que já vimos:

$$\sqrt{2gh_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{h_n = h\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}}$$

**a.)** n=5(altura máxima **depois** da quarta colisão), assim:

$$h_5 = h\left(\frac{1}{2}\right)^{2(5-1)} \Rightarrow \boxed{h_5 = \frac{h}{256}}$$

**b.)** Aqui, precisaremos quebrar o tempo dessa série de colisões em dois momentos: o antes da primeira colisão e o depois da primeira colisão. Isto porque antes da primeira só existe o tempo da bolinha cair, depois da primeira em diante, existe o tempo de subida e descida da bola.

Para o momento um:

$$h = \frac{g{t_{mom.1}}^2}{2} \Rightarrow \boxed{t_{mom.1} = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Para o momento dois($n > 1$), o tempo de subida é o mesmo que o de descida entre duas colisões, por isso, o tempo para apenas subir é $\frac{t_n}{2}$:

$$h_n = \frac{g\left(\frac{t_n}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow t_n = 2\sqrt{\frac{2h_n}{g}} \Rightarrow t_n = 2\sqrt{\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}}{g}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Agora, usaremos a soma da P.G(razão = 0,5 e termo inicial=1) infinita pois o que faremos é somar as parcelas de todos as infinitas colisões. Assim, ainda no segundo momento:

$$t_{mom.2} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...)\sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow t_{mom.2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$\boxed{t_{mom.2} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

Daí basta agora somar o tempo dos dois momentos:

$$t_{tot} = t_{mom.1} + t_{mom.2} = \sqrt{\frac{h}{g}} + 2\sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow \boxed{t_{tot} = 3\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

**Respostas:**

$$\boxed{h_{col.4} = \frac{h}{256}}$$

$$\boxed{t_{tot} = 3\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

**Questão 2.**(Exclusiva para alunos do 1o ano) Julius é um astronauta apaixonado por física. Durante uma de suas missões, o filme Oppenheimer, longa extremamente aguardado por Julius, é lançado para streaming. Visando assitir o filme em sua tv cuja potência vale $360W$, ele precisa armazenar a energia gasta pela TV por meio de Placas solares, que são acionadas manualmente. Sabendo que o filme demora 3 horas, que sua aeronave possui duas placas solares, cada uma com 20 cm de comprimento e 3 cm de altura e que o sol irradia luz que oferece uma intensidade de $60\frac{MW}{m^2}$, determine o tempo mínimo para que as placas devem permanecer acionadas para que Julius consiga assitir ao filme por inteiro.

**Solução:**

Para saber a energia requerida pela tv, utilizaremos os conceitos de potência:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$\Delta E = P\Delta t$$

Substituindo pelos dados fornecidos, temos que:

$$\Delta E = 3888000J$$

Essa energia deve ser a captada pelas placas solares. Sabendo a intendisdade da luz solar, iremos multiplicar pela área da placa para achar a potência e por fim, isolar o tempo. Veja:

$$P = I_{sol}.S_{placa}$$

substituindo pelos valores dados temos que e lembrando que são 2 placas, acharemos a potência para 1 placa e assim o tempo necessário de exposição, que ao fim deve ser dividio por 2.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t_{placa}} = 360000W$$

$$\Delta t = \frac{3888000}{360000} = 10.8$$

Como são duas placas o tempo de exposição necessário deve ser $\frac{t}{2}$

$$\boxed{t = 5.4s}$$

**Resposta:**

$$\boxed{t = 5.4s}$$

**Questão 3.** (Exclusiva para alunos do 1o ano) Uma esfera, de raio inicial $R_0 = 50cm$ passa por uma superfície rugosa que o faz perder sua energia cinética, que é transformada em calor,que é utilizado para aquecê-la e provocar sua dilatação. Sabendo que a massa da esfera é de 250g, sua velocidade inicial vale $250\frac{m}{s}$, que o coeficiente de atrito entre a bolinha e o solo vale $\mu = 0,75$, que o coeficiente de dilatação linear da esfera vale $\alpha = 5.10^{-3}m^{-1}\circ C^{-1}$ e a capacidade térmica da bolinha vale 250 J/Kg $\circ C, determine$ :

(a) Determine a distância percorrida até a bola parar.

(b) Determine o volume final da esfera. (Considere $\pi = 3$)

**Solução:**

a) Por conservação de energia, chegamos em:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\mu d$$

$$\boxed{d = \frac{v^2}{2g\mu} = 4166,7m}$$

b) O calor dissipado pela força de atrito ira aquecer a bolinha que gerará a sua dilatação. Toda a energia cinética será tranformada em calor.

$$E_{cin} = \frac{mv^2}{2} = 7812,5J$$

$$E_{cin} = Q = mc\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{E_{cin}}{mc}$$

substituindo pelos valores dados

$$\Delta T = 125 \circ C$$

A equação de dilatação do volume é dado por:

$$V = V_0(1 + 3\alpha\Delta T)$$

O volume inicial é o volume da esfera de raio 50 cm. Lembrando que o volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Substituindo pelos valores fornecidos, chegaremos que:

$$\boxed{V = 1,4375m^3}$$

**Resposta:**

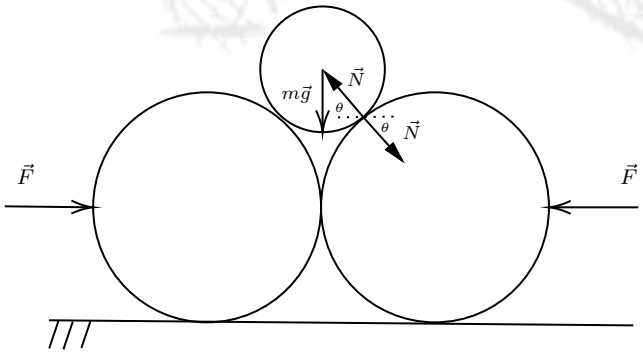
$$\boxed{d = 4166,7m}$$

$$\boxed{V = 1,4375m^3}$$

**Questão 4.** (Exclusiva para alunos do 1o ano) Considere o seguinte sistema de massas circulares de densidade superficial $\sigma$ de raios $r$(círculo menor) e $R$(círculo maior). Determine qual deve ser o menor módulo da força horizontal $\vec{F}$ aplicada em cada um dos circulos de tal modo que o menor círculo fique na iminência de cair.(despreze a existência de atrito).

**Solução:**

Observe o diagrama de forças a seguir:




Note que para que o peso do disco menor fique equilibrado:

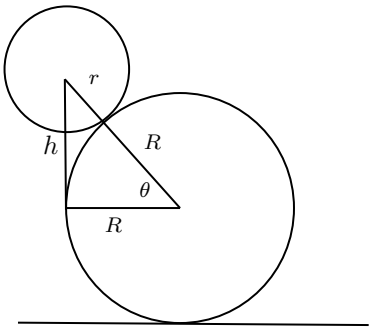
$$2N\,\text{sen}\,(\theta) = mg \Rightarrow \boxed{N = \frac{mg}{2\,\text{sen}\,(\theta)}}$$

Além disso, para o disco maior:

$$Ncos(\theta) = F \Rightarrow F = \frac{mgcos(\theta)}{2\,\text{sen}\,(\theta)} \Rightarrow \boxed{F = \frac{mg}{2\tan(\theta)}}$$

Pela definição de densidade superficial:

$$\sigma = m/Área \Rightarrow \boxed{m = \sigma \pi r^2}$$




Pela geometria do problema:

$$h^2 = (R + r)^2 - R^2 \Rightarrow h = \sqrt{r(r + 2R)}$$

Portanto:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{R} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sqrt{r(r + 2R)}}{R}$$

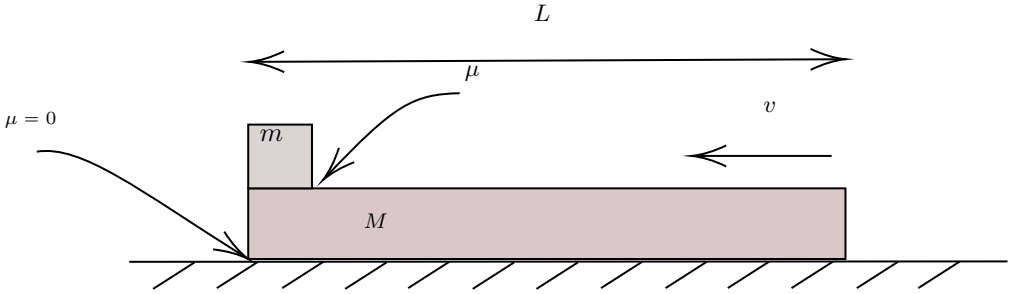
Juntando o que descobrimos sobre $m$ e $\tan(\theta)$:

$$\boxed{F = \frac{\sigma \pi r^2 g R}{2\sqrt{r(r + 2R)}}}$$

**Resposta:**

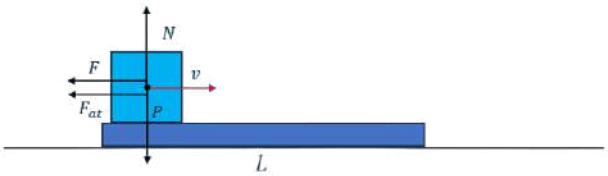
$$\boxed{F = \frac{\sigma \pi r^2 g R}{2\sqrt{r(r + 2R)}}}$$

**Questão 5.** Uma placa de comprimento $L$ e massa $M$ está em uma superfície horizontal lisa. Sobre ela, há um bloco de massa $m$ e, entre eles, há um coeficiente de atrito $\mu$. Qual é a velocidade mínima que deve ser dada a placa rapidamente para que o bloco passe por ela e caia? O tamanho do bloco é neglicenciável.



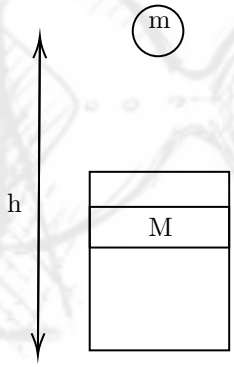

**Solução:**

Indo para o referencial da barra, o diagrama de forças fica assim:




O bloco adquire uma velocidade $v$ para a direita, tem a normal $N$, o peso $P$, a força de atrito $F_{at}$ e uma força de inércia $F = ma$, em que $a$ é a aceleração que a barra sente no referencial do chão. Pela 2ª Lei de Newton, é simples calcular a aceleração: $a = \frac{F_{at}}{M} = \frac{\mu mg}{M} \Rightarrow F = \frac{\mu m^2 g}{M}$. Então, na horizontal, o bloco sente uma força resultante para a esquerda $F' = \mu mg(1 + \frac{m}{M})$. No caso-limite em que o bloco para exatamente "colado"à barra, toda a sua energia cinética no início é "comida"pelo trabalho de $F'$ e convertida em calor: $\frac{mv^2}{2} = \mu mgL(1 + \frac{m}{M})$ Dessa forma, encontramos a resposta facilmente para $v$.
**Resposta**: $v = \sqrt{2\mu mgL(1 + \frac{m}{M})}$

**Questão 6.** Um recipiente contém um mol de gás monoatômico selado por um pistão com massa $M$. Uma bolinha de massa $m$ é jogada em cima do pistão de uma altura $h$ da base do recipiente. Após sucessivas colisões, o sistema para. Qual a altura $h'$ do pistão a partir da base no final de tudo?




**Solução:**

ERRATA: A área $S$ do pistão e a sua altura inicial $a$ também deveriam ter sido fornecidas.

Conservação de energia é a chave para esse problema. No início, o sistema possui a energia potencial gravitacional da bola $U_1 = mgh$, a do pistão $U_2 = Mga$, a energia térmica do gás monoatômico $U_3 = \frac{3}{2}RT$ - em que $T$ pode ser achada pela Lei dos Gases Ideais e pela 2ª Lei de Newton:

$$Mg = PS$$
$$\boxed{P = \frac{Mg}{S}}$$
$$PV = RT$$
$$PSa = RT$$
$$\boxed{Mga = RT}$$

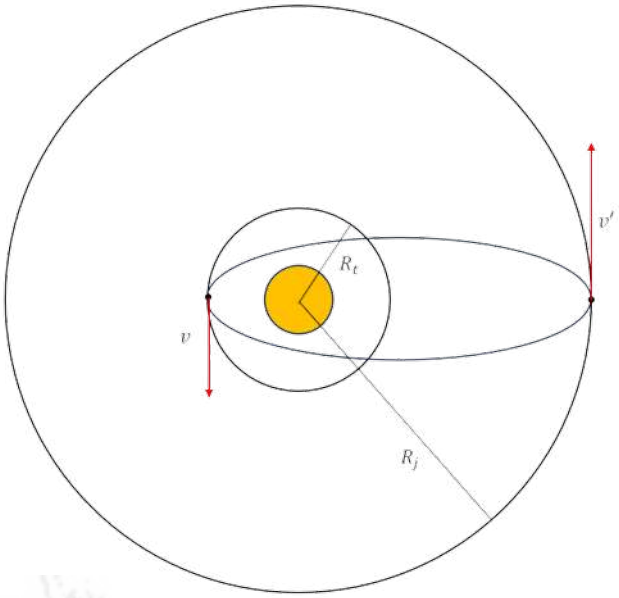
Logo, $U_3 = \frac{3}{2}Mga$. No final, há apenas a energia potencial gravitacional do sistema bola + pistão $U_4 = (M+m)gh'$ e a energia térmica que será, analogamente a inicial, $U_5 = \frac{3}{2}(M+m)gh'$. Daí, fica fácil:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_4 + U_5$$
$$mgh + Mga + \frac{3}{2}Mga = (M+m)gh' + \frac{3}{2}(M+m)gh'$$
$$mh + \frac{5}{2}Ma = \frac{5}{2}(M+m)h'$$

**Resposta:** $h' = \dfrac{mh + \frac{5}{2}Ma}{\frac{5}{2}(M+m)}$

**Questão 7.** A Transferência de Hoffman é uma manobra orbital idealizada para transportar um objeto de uma órbita de raio menor para uma órbita de raio maior, usando de uma órbita elíptica intermediária. Cientistas na Terra querem utilizar essa manobra para jogar um satélite de uma órbita em torno da Terra para orbitar Júpiter. Suponha que seja apenas um corpo orbitando o Sol com a mesma distância que a Terra e que, para completar a missão, basta que a máquina chegue na mesma distância ao Sol que Júpiter. Nessas condições, qual é o impulso que deve ser aplicado para que o satélite se mantenha na órbita de Júpiter? Dados: distância Terra-Sol = 1UA; distância Júpiter-Sol = 5,2UA; 1UA = $1,5 \cdot 10^{11}$m

**Solução:**




O "impulso" aqui se trata de uma simples mudança de velocidade. O satélite está na órbita da Terra de raio $R_t$ com velocidade $v$ e tem que chegar na órbita de Júpitre de raio $R_j$ com velocidade $v'$ utilizando essa órbita elíptica intermediária com dois impulsos (um impulso no primeiro ponto para entrar nela e um outro no segundo para entrar na órbita de Júpiter). Daí fica fácil. Podemos encontrar a velocidade $v_j$ que o satélite vai ter na órbita de Júpiter antes do impulso sabendo que a energia por unidade de massa dele é dada por $\frac{E}{m} = -\frac{GM}{2a}$ e, pela geometria da imagem, $2a = R_j + R_t = 6,2$ UA $= 9,3 \cdot 10^{11}$ m. Pela conservação da energia mecânica:

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{v_j^2}{2} - \frac{GM}{R_j}$$

$$\frac{v_j^2}{2} = GM(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_j + R_t})$$

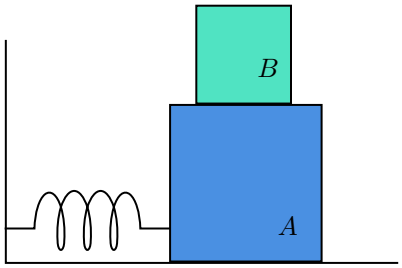
$$v_j = \sqrt{2GM(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_j + R_t})} \approx 7430 \text{ m/s}$$

$v'$ é apenas a velocidade da órbita circular de Júpiter:

$$v' = \sqrt{\frac{GM}{R_j}} \approx 13100 \text{ m/s}$$

Daí, basta calcular $\Delta v = v' - v_j$
**Resposta:** $\Delta v \approx 5670$ m/s

**Questão 8.** Dois blocos A e B de massas equivalente a $m_A = m_B = 5$kg oscilam em MHS devido a uma mola, como representado na figura. O bloco B está inicialmente "grudado" no bloco A. Sabendo que a frequência angular inicial do sistema é de $\omega = 4$rad/s, calcule o que se pede:




(a) A constante elástica da mola, em N/m.

(b) Quando o sistema alcança velocidade máxima, alguém gentilmente retira o bloco B. Qual será a nova amplitude de oscilação do sistema? A energia total inicial do sistema (antes de retirar o bloco B) era de $E = 640$J.

**Solução:**

(a) Precisamos relacionar a constante elástica da mola ($k$) com a frequência natural de oscilação do sistema ($\omega$). Para isso, vamos encontrar a equação do MHS para no sistema massa mola:

$$(m_a + m_b)\, a = -kx \Rightarrow a + \frac{k}{m_a + m_b} x = 0$$

Portanto, a frequência $\omega^2$ será numericamente igual $k/(m_a + m_b)$. Isso nos leva a:

$$k = (m_a + m_b)\omega^2 = 10 \cdot 16 = \boxed{160\text{N/m}}$$

(b) Os blocos estarão em velocidade máxima quando a **deformação da mola for nula**, ou seja, toda a energia do sistema estará na forma de energia cinética. Vamos encontrar a velocidade do sistema nesse instante:

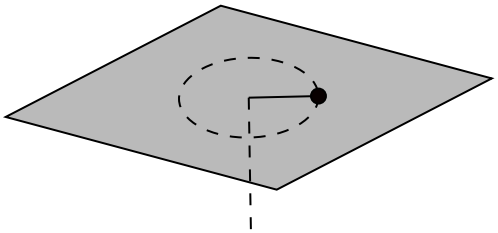
$$\frac{(m_a + m_b)v^2}{2} = E \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m_a + m_b}$$

Após alguém retirar o bloco B de cima do bloco A, a velocidade do bloco A não irá se alterar (o bloco B foi tirado gentilmente, sem que houvesse força sobre A), porém teremos que reescrever o balanço de energia do sistema já que sua energia total foi alterada. Vamos aproveitar isso pra descobrir a nova amplitude igualando a energia total a energia potencial elástica máxima (quando a deformação da mola for máxima).

$$\frac{m_a}{2}\left(\frac{2E}{m_a + m_b}\right) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2E}{k}\left(\frac{m_a}{m_a + m_b}\right)} = 2\text{m}}$$

**Questão 9.** Um pequeno disco preso em uma extremidade de um fio inextensível passa por um furinho em uma mesa (imagem abaixo). Inicialmente, o disco se move em um círculo de raio $R$ com energia cinética $K_0$. A partir de certo instante, um menino lentamente puxa a outra extremidade do fio até que o novo raio da trajetória do disco seja de $R/\eta$. Qual foi o trabalho $W$ realizado pelo menino?



**Solução:**

Sendo $v_0$ a velocidade inicial do disco (quando ele estava em trajetória de raio $R$), podemos escrever $K_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$. Além dessa equação, também podemos escrever a **conservação do momento angular**, grandeza que se conserva devido a não-existência de forças tangenciais sobre a partícula. A conservação do momento angular nos leva a:

$$m\,v_0\,R = m\,v'\,(R/\eta) \Rightarrow v' = \eta\,v_0$$

Como o trabalho é a variação de energia cinética do sistema, podemos escrever que:

$$W = \frac{m}{2}(v'^2 - v_0^2) = \frac{mv_0^2}{2}(\eta^2 - 1) \Rightarrow \boxed{W = K_0(\eta^2 - 1)}$$

**Questão 10.** Mr. Olympia desejava realizar uma viagem de carro partindo da cidade A e se locomovendo até a cidade B, separadas por uma distância $d = 300$km. Ao sair, Mr. Olympia abasteceu seu carro com 28L de gasolina e rumou em direção a cidade B com velocidade constante $v = 72$km/h. Sabendo que seu automóvel consome combustível a uma taxa de 10km/L, e que há uma parada C distante em 120km de A, calcule:

(a) Após quanto tempo, em minutos, Mr. Olympia chegará em C?

(b) Mr. Olympia conseguirá alcançar seu destino final?

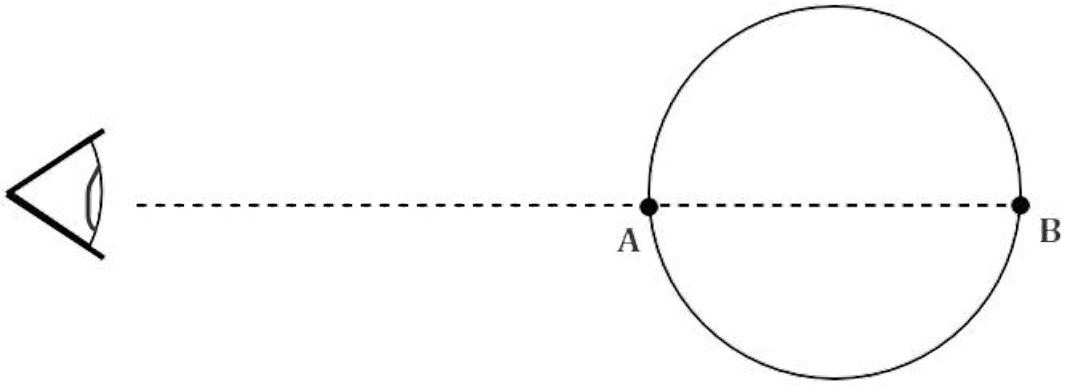
**Solução:**

(a) Podemos calcular o tempo de forma rápida aplicando a equação $t = \Delta x/v$. Como nossa velocidade está em kilômetros por hora, precisaremos multiplicar o tempo total por 60 para transformá-lo em minutos.

$$t = \frac{120 \cdot 60}{72} = \frac{7200}{72} = 100\text{min}$$

(b) Como o carro de Mr. Olympia consome combustível a uma taxa de 10Km/L e seu carro está abastecido com 28L, a distância total que ele conseguirá percorrer será de $10 \cdot 28 = 280$km. Portanto, Mr. Olympia **não chegará** em seu destino final.

**Questão 11.** Uma bola transparente de raio R é visualizada por um observado em O ao longo da linha diametral AB. Sabe-se que ele tem a sensação que o ponto B está muito distante.




(a) Qual é o índice de refração da bola?

(b) Se $\eta = 3$, qual seria a distância da imagem até A?

**Solução:**

a) Segundo o enunciado, a imagem de B é imprópria (está no infinito, $p \to \infty$). Basta, então, utilizar a equação do dioptro esférico côncavo. Na região do observador, $\eta_{ar} = 1$. Chamando o índice de refração de dentro da bola de $\eta$:

$$\frac{\eta_1}{p_1} + \frac{\eta_2}{p_2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{R}$$
$$\frac{\eta}{2R} + \frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{R}$$
$$\therefore \frac{\eta}{2} = 1 - \eta$$
$$\eta = 2 - 2\eta$$

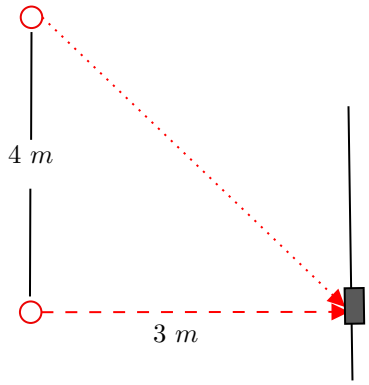
**Resposta**: $\eta = 2$

b) Usando a equação do dioptro esférico côncavo direto:

$$\frac{\eta_1}{p_1} + \frac{\eta_2}{p_2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{R} \tag{1}$$
$$\frac{3}{2R} + \frac{1}{p} = \frac{3-1}{R} \tag{2}$$
$$\frac{1}{p} = \frac{4-3}{2R} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

**Resposta**: $p = 2R$, ou seja, a imagem está a uma distância de $2R$ a partir do vértice da bola em direção ao observador.

**Questão 12.** Uma pessoa estava a brincar com uns emissores de ondas eletromagnéticas, até que decidiu testar uma forma diferente de medir o comprimento de onda emitido. Para isso, ele posicionou o receptor (verde) numa parede, enquanto que os emissores (vermelhos) foram dispostos de acordo com a figura. Sabendo que a intensidade captada pelo receptor foi de **três** vezes a intensidade das ondas originais, quanto deve ser o valor do comprimento de onda dessa onda utilizada?




**Solução:**

Sabemos que quando temos a superposição (encontro) de duas ondas idênticas de intensidade $I$, a intensidade da onda resultante será de $I_T = 2I(1 + cos\Delta\phi$, onde $\Delta\phi$ é a diferença de fase entre as duas ondas. Como a onde resultante do problema tem intensidade $3I$, então a diferença de fase será igual a:

$$2I(1 + cos\Delta\phi) = 3I \Rightarrow cos\Delta\phi = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \therefore \Delta\phi = 60$$

O triângulo apresentado na figura é o triângulo pitagórico, logo seus lados sao 3, 4 e 5. Enquanto um raio percorreu uma distância de 5m, o outro percorreu 3m o que nos leva a uma diferença de caminho óptico $\Delta x = 2m$. Logo:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \Delta\phi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi/3} = 12\text{m}}$$