Soluções Simulado OBF - Fase 2 Nível 3

Autores: Gustavo Valente

Questão 1. Um certo dia, GD estava lavando suas roupas no quintal de sua casa, quando de repente começou a chover. Para a infelicidade de GD, um raio caiu próximo a ele, atingindo uma bolha de sabão que foi liberada enquanto ele lavava suas roupas. Considere a bolha de sabão com um raio R e espessura t($t << R$). O raio carrega a bolha de sabão com um potencial V_0. A bolha estoura e transforma-se numa gota. Dados: V_0 = 10MV R = 3 x 10$^-$3m t = 5 x 10$^-$9m

a)Estime o potencial elétrico adquirido por essa gota.

b)Considere que o corpo de GD possui uma resistência de 100.000Ω, e uma corrente considerada letal é de 80 miliamperes, determine, com base em sua estimativa, se GD se deu mal ou não.(Considere que a gota entrou em contato direto com GD).

Solução:

a) Primeiramente, vamos calcular a carga adquirida pela bolha quando é exposta ao potencial do raio. O potencial gerado pela esfera carregada é dado por:

$$V_0 = \frac{kQ}{R}$$

Em que podemos obter o valor da carga elétrica da bolha de sabão:

$$Q = \frac{V_0 R}{k}$$

Quando a bolha estoura e forma a gota de raio r, podemos obter esse raio explorando o fato que o volume da gota é conservado:

$$4\pi R^2 t = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$r = (3R^2 t)^{\frac{1}{3}}$$

Agora, podemos calcular o valor do novo potencial V´ na gota de raio r:

$$V' = \frac{kQ}{r} = \frac{k}{(3R^2 t)^{\frac{1}{3}}}\frac{V_0 R}{k}$$

$$V' = V_0(\frac{R}{3t})^{\frac{1}{3}}$$

Substituindo os valores dados no enunciado:

$$V' = 10MV(\frac{3x10^-3m}{3 \cdot 5x10^-9m})^{\frac{1}{3}}$$
$$V' = 5.84 \cdot 10^8 V$$

b)

Considerando uma resistência do corpo de GD de 1M$Omega$, podemos utilizar a lei de ohm para estimar a corrente que ira fluir pelo seu corpo:

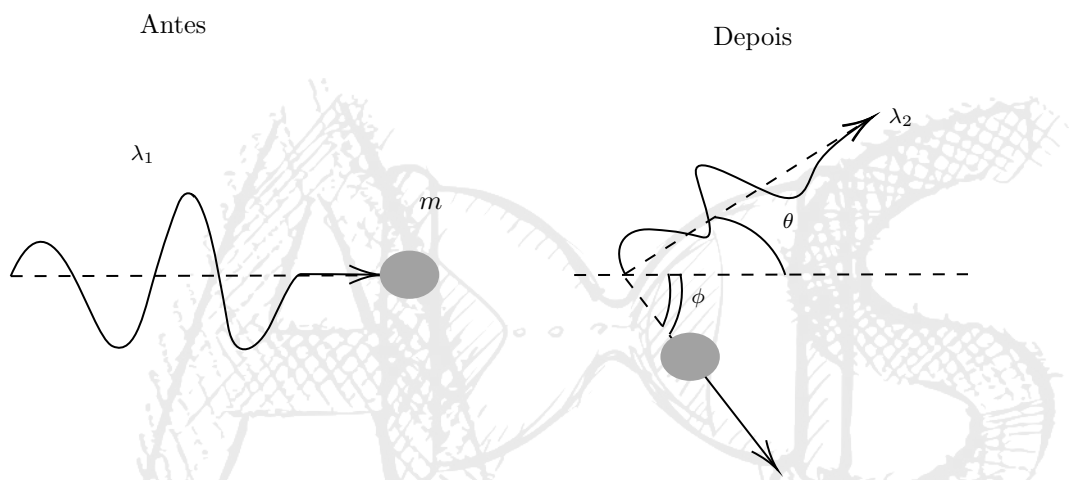
$$5.84 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^6 I$$

$$I = 584A$$

Logo, segundo nossas estimativas, GD foi fritado.

Questão 2. Um dos fenômenos que comprovou o caráter corpuscular das ondas eletromagnéticas foi o efeito Compton. Em meio a estudos sobre espalhamentos de raios-X, foi constatado que a luz espalhada por um material apresentava dois picos de emissão, com dois comprimentos de ondas diferentes. O pico mais forte corresponde ao comprimento de onda λ_1, igual a radiação incidente, que é explicado pela difração da luz na rede cristalina do alvo. O pico secundário ocorre com um comprimento de onda $\lambda_2(\lambda_2 > \lambda_1)$, que depende do ângulo de espalhamento θ. O deslocamento Compton é definido como a diferença entre os comprimentos de onta $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Tal fenônemo é explicado pela colisão de um fóton de comprimento de onda λ_1 com um elétron livre ou em repouso. Depois da colisão, o fóton ganha um novo comprimento de onda λ_2 e é espalhado de um ângulo θ, enquanto o elétron é espalhado com um ângulo ϕ, conforme mostra a figura:



Calcule o deslocamento Compton em termos do ângulo θ, da constante de planck h, da velocidade da luz c, e da massa de repouso do elétron m_0

Solução:

A colisão do Efeito Compton deve obdecer aos conceitos de conservação de energia. Considerando que a energia inicial do elétron é igual a sua energia de repouso m_0c^2, e que sua energia depois da colisão é dada por $E_e(E_e > m_ec^2)$.

Conservando a energia do sistema, podemos dizer que:

$$m_0c^2 + \frac{hc}{\lambda_1} = E_e + \frac{hc}{\lambda_2}$$

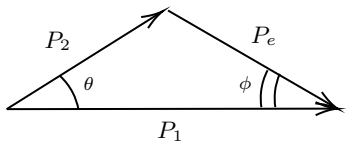
Isolando o valor de E_e, encontramos que:

$$E_e = m_0c^2 + hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

.

Para conservar agora, o momento do sistema, podemos observar como se comportará o momento do fóton antes de incidir no elétron, depois de incidir, e o elétron após o espalhamento.

Podemos representar esse sistema com os momentos do sistema da seguinte forma:



Aplicando a lei dos cossenos, nesse triângulo formado, teremos:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

Substituindo valores:

$$p_e = \frac{h^2}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2} - \frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}\cos\theta$$

E também sabemos, que a energia de um elétron é relacionada ao seu momento da seguinte forma:

$$E_e^2 = (m_0c^2) + (p_ec)^2$$

Substituindo esses resultados na equação que encontramos previamente para a energia e para o momento, obtemos:

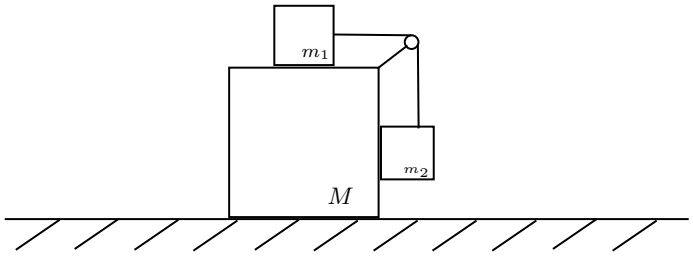
$$2m_0c^3\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \left[hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right] = \frac{h^2c^2}{\lambda_1^2} + \frac{h^2c^2}{\lambda_2^2} - \frac{h^2c^2}{\lambda_1\lambda_2}\cos\theta$$

$$m_oc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{h}{\lambda_1\lambda_2}(1-\cos\theta)$$

Logo, finalmente, chegamos ao resultado de que:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

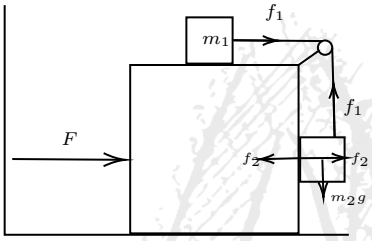
Questão 3. Um bloco quadrado de massa M, tem conectado por uma polia, dois blocos maiores de massas m_1 e m_2. O bloco de massa m_1 se encontra em cima do bloco de massa maior, e o de massa m_2, segurado pela polia, encostando no bloco maior, como mostra a figura abaixo:



Considerando o atrito entre todas as superfícies desprezível, e uma polia ideal, encontre uma força horizontal, aplicada no bloco de massa M, para que não haja movimento relativo entre os blocos.

Solução:

Podemos denotar as forças do sistema:



As acelerações de m_1, m_2, e M são as mesmas quando não há movimento relativo entre as massas. Podemos escrever a equação de movimento no eixo x:

$$\ddot{x}(M + m_1 + m_2) = F$$
$$\ddot{x}m_1 = f_1$$

Para não haver movimento relativo no eixo x com m_2, devemos ter:

$$f_1 = m_2 g$$

Substituindo o valor de f_1 na equação anterior e isolando o valor de $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{m_2 g}{m_1}$$

Substituindo na equação de movimento no eixo x e isolando o valor de F, obtemos o resultado de:

$$F = \frac{m_2(M + m_1 + m_2)g}{m_1}$$

Questão 4. Considere que, em um experimento envolvendo canhão de elétrons, as partículas negativas de massa m_e são ejetadas com velocidade v_x horizontal através do eixo central de um tubo circular, que se encontra ao longo do eixo x e de raio r, e, em seguida, colidem com um anteparo

vertical que está a uma distância D horizontal da extremidade do tubo, com $D >> r$. Após um longo tempo de experimento, elétrons são encontrados ao longo de um comprimento vertical ϕ no anteparo. A força gravitacional é desprezível. Determine a expressão para o comprimento mínimo que ϕ pode atingir.

Solução:

No contexto do experimento descrito, se os elétrons são ejetados com uma velocidade horizontal constante v_x ao longo do eixo x do tubo circular, podemos assumir que a incerteza na velocidade horizontal (Δv_x) é pequena em relação à incerteza na velocidade vertical (Δv_y). Assim, podemos aplicar o princípio da incerteza para relacionar a incerteza na posição vertical (Δy) dos elétrons com a incerteza na velocidade vertical (Δv_y):

$$m_e(\Delta y)(\Delta v_y) \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

Podemos isolar o valor para obter a variação da velocidade:

$$\Delta v_y \geqslant \frac{h}{4\pi(\Delta y)m_e}$$

Mas sabemos, do enunciado, que $\Delta y = r$. Podemos definir então um ângulo θ, tal que sua tangente será igual a velocidade vertical dividida pela horizontal.

Pensando nesse ângulo no lançamento, podemos também perceber que essa tangente também será igual ao deslocamento vertical, que é o que queremos encontrar, dividido pela distância horizontal D. Equacionando:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\phi}{2D}$$

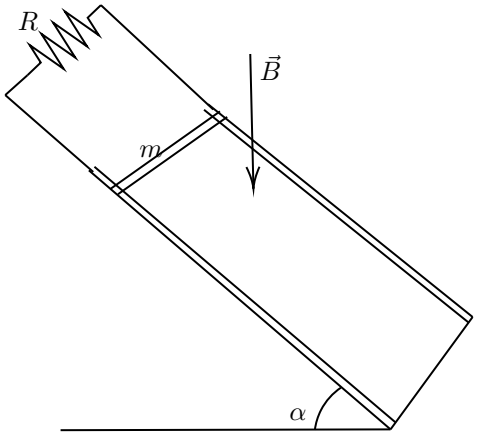
Substituindo o valor da velocidade vertical encontrado anteriormente, teremos:

$$\frac{\frac{h}{4\pi r m_e}}{v_x} = \frac{\phi}{2D}$$

Finalmente, isolando o valor de ϕ, encontramos que:

$$\phi = \frac{2hD}{4\pi r m_e v_x} = \frac{hD}{2\pi r m_e v_x}$$

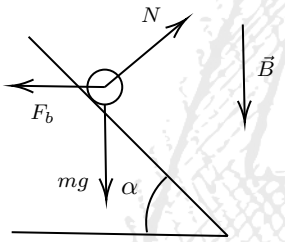
Questão 5. Um campo magnético uniforme B é perpendicular o solo. Há um plano com inclinação α em relação à horizontal. No plano inclinado são montados trilhos paralelos que distam l entre si. Sobre os trilhos, é colocada uma haste condutora de massa m e resistência desprezível. Entre os dois trilhos paralelos é colocado um resistor de resistência R.



Qual será a velocidade constante v com que a barra desliza ao longo dos trilhos? Despreze o atrito entre a barra e os trilhos, e considere um campo gravitacional g na região.

Solução:

Primeiro, pela regra da mão direita, podemos definir a direção da corrente induzida pelo campo magnético aplicado:



Já que a velocidade com que a barra desce deve ser constante, as forças atuando nela devem ser zero, então, podemos primeiro escrever as equações de movimento no eixo x:

$$F_b = N \operatorname{sen} \alpha$$

Na direção y, teremos:

$$mg = N \cos \alpha$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{F_b}{mg} = \tan \alpha$$

Mas, sabemos que a expressão da força magnética pode ser dada por: $F_b = BIL$

Substituindo o valor na equação anterior, teremos:

$$\frac{BIL}{mg} = \tan \alpha$$
$$BIL = \tan \alpha mg$$

Podemos então, isolar o valor da corrente:

$$I = \frac{\tan\alpha}{BL}$$

Agora podemos usar a lei de ohm para incluir a resistência, mas antes, sabemos que em magnitude, a força eletromotriz induzida é dada por:

$$emf = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\vec{B}\vec{A}}{dt}$$

em que $\vec{A}$ é o vetor área perpendicular ao plano. Logo, podemos escrever que:

$$\frac{d}{dt}(BA\cos\alpha)$$

Pela geometria do problema, a área será dada por l multiplicado por um valor arbitrário de z. Sabendo disso, podemos escrever que:

$$emf = \frac{d}{dt}(Blz\cos\alpha)$$

$$emf = \frac{dz}{dt}Blz\cos\alpha$$

Mas $\frac{dz}{dt} = v$, logo, podemos substituir v na equação da força induzida, e em seguida, na equação da lei de ohm:

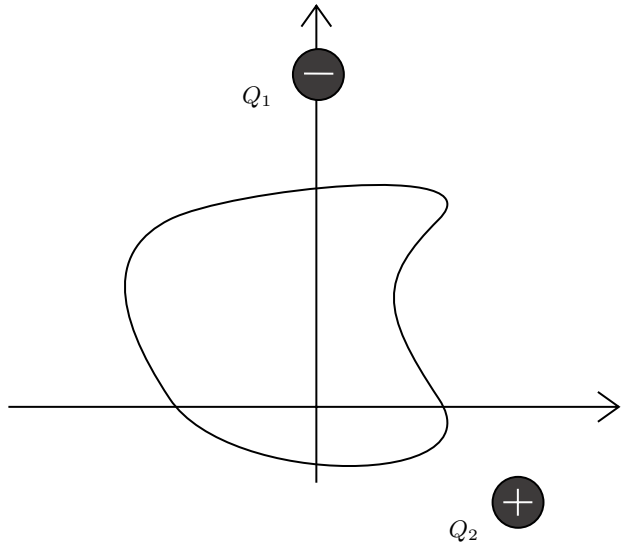
$$I = \frac{emf}{R}$$

$$Blv\cos\alpha = \frac{mgR}{lB}\tan\alpha$$

Finalmente, isolando o valor de v, obtemos que:

$$v = \frac{mgR\tan\alpha}{l^2B^2}$$

Questão 6. Half snicker, em sua infância, costumava brincar muito com massinhas de play-doh. Massinhas de play-doh tem uma alta concentração de sal em sua composição, dando a elas uma propriedade condutora. Sabendo disso, half snicker, um menino curioso, decidiu fazer um experimento na turma IPHO baby. Half posicionou uma caixa de play-doh próxima a uma carga negativa $Q_1 = -e$ e de uma positiva $Q_2 = 2e$, como mostra a figura. A carga negativa está a uma distância $\vec{r_1} =< 0, d, 0 >$, e a positiva a uma distância $\vec{r_2} =< \frac{d}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{\sqrt{2}}, 0 >$.



Ajude Half Snicker nesse experimento, e determine a magnitude do campo elétrico gerado pela massinha de play-doh nas configurações descritas.

Solução:

Temos as coordenadas da posição das cargas, então podemos começar trabalhando com a distância da carga 2 em relação à origem. Essa distância pode ser obtida utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$D_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} = d$$

Temos apenas uma coordenada para a carga 1 que indica a posição de d, logo, concluímos que ambas as cargas distam d da origem.

Agora podemos escrever o campo elétrico gerado na origem devido à carga 1:

$$E_{Q1} = \frac{Ke}{d^2}$$

Sob o eixo y.

Agora, o campo elétrico na origem devido à carga 2:

$$E_{Q2} = \frac{K2e}{d^2}$$

Fazendo um ângulo de 45° com o eixo y. O ângulo se dá por conta das coordenadas dadas para x e y, e pode ser obtido por trigonometria.

Agora que sabemos todas as contribuições e o ângulo que um campo faz em relação ao outro, podemos obter a contribuição total por meio da lei dos cossenos:

$$E = \sqrt{E_{Q1}^2 + E_{Q2}^2 + 2E_{Q1}E_{Q2}\cos 45^\circ}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{Ke}{d^2}\right)^2 + \left(\frac{K2e}{d^2}\right)^2 + 2\frac{Ke}{d^2}\frac{K2e}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

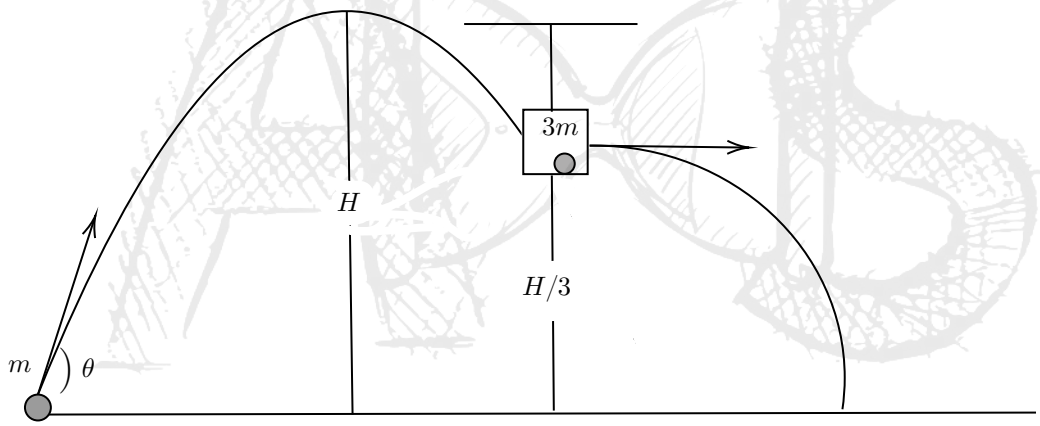
$$E = \sqrt{\left(\frac{Ke}{d^2}\right)^2 \left(1 + 4 + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$E = \frac{Ke}{d^2}\sqrt{\frac{4 + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

Logo, a magnitude do campo resultante é igual a:

$$E = \frac{Ke}{d^2}\sqrt{2\sqrt{2} + 5}$$

Questão 7. Um corpo de massa m é lançado obliquoamente com um ângulo theta (θ). Ao alcançar um altura de dois terços da altura máxima (H), o corpo entra em um dispositivo que para a bolinha de massa m e a lança horizontalmente em direção a um corpo de massa 3m com um velocidade igual a 2 vezes a velocidade inicial de lançamento. Sabendo que a colisão dos corpos é inelástica e que não há forças dissipativas, determine:



(a) Encontre a velocidade inical de lançamento em função de θ, H e g

(b) Qual o alcance horizontal total percorrido, antes e depois da colisão?

Solução:

a) Lembrando que a altura máxima de um projétil em um lançamento oblíquo é:

$$H_{max} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(\theta)^2}{2g}$$

Pela imagem, é fácil extrair que H é a altura máxima. Isolando V_0^2 temos:

$$V_0^2 = \frac{2gH}{\operatorname{sen}(\theta)^2}$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\operatorname{sen}(\theta)^2}}}$$

b) O alcance horizontal máximo é a ditância percorrida, inicialmente, pela bolinha de massa m até encontrar a de massa 3m somada com a distância que as duas bolinhas percorrem juntas no lançamento vertical. Lembrando da equação da trajetória, podemos achar a primeira distância em função da altura dada ($\frac{H}{3}$). Veja:

$$y = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos(\theta)^2}$$

Substituindo $y = \frac{H}{3}$ e pegando a solução que fornece o maior x (pegaremos essa solução pois existem 2 pontos em que a altura é $\frac{H}{3}$ mas pela figura, é fácil ver que a bolinha já passou da altura máxima, assim devemos pegar o maior x pois o menor x estaria antes, ou seja, à esquerda do ponto de altura máxima.),temos:

$$\frac{H}{3} = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos(\theta)^2}$$

$$\frac{gx^2}{2V_0^2\cos(\theta)^2} - \tan(\theta)x + \frac{H}{3} = 0$$

Substituindo V_0^2, temos:

$$\frac{g\tan(\theta)^2x^2}{4H} - \tan(\theta)x + \frac{H}{3} = 0$$

Resolvendo a equação e pegando a maior solução, encontraremos:

$$x = \frac{2H}{\tan(\theta)}(1 + \frac{\sqrt{6}}{3})$$

Para achar o deslocamento no lançamento horizontal das duas massas, precisamos fazer a conservação do momento para achar a velocidade de lançamento das massas. O enunciado nos diz que, ao chegar no equipamento, a bola de massa m é lançada com velocidade $2V_0$ em direção à massa 3m, que está em repouso. Assim, temos:

$$2mV_0 = 4mV$$

$$V = \frac{V_0}{2}$$

A velocidade é a metade da velocidade inicial do lançamento oblíquo. Sabendo que o tempo de queda é dado por $t_q = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$ (A altura é $\frac{H}{3}$ e a gravidade vale g).

$$x_h = t_qV$$

Onde x_h é o alcance horizontal do lançamento horizontal.

$$\boxed{x_h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{3g}}\sqrt{\frac{2gH}{\operatorname{sen}(\theta)^2}}}$$

$$\boxed{x_h = \frac{H\sqrt{3}}{3\operatorname{sen}(\theta)}}$$

Assim, o deslocamento total é:

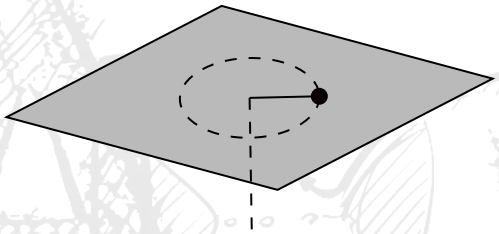
$$\boxed{x_t = \frac{2H}{\tan(\theta)}(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}) + \frac{H\sqrt{3}}{3\,\mathrm{sen}\,(\theta)}}$$

Resposta:

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\mathrm{sen}\,\theta^2}}}$$

$$\boxed{x_t = \frac{2H}{\tan(\theta)}(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}) + \frac{H\sqrt{3}}{3\,\mathrm{sen}\,(\theta)}}$$

Questão 8. Um pequeno disco preso em uma extremidade de um fio inextensível passa por um furinho em uma mesa (imagem abaixo). Inicialmente, o disco se move em um círculo de raio R com energia cinética K_0. A partir de certo instante, um menino lentamente puxa a outra extremidade do fio até que o novo raio da trajetória do disco seja de R/η. Qual foi o trabalho W realizado pelo menino?



Solução:

Sendo v_0 a velocidade inicial do disco (quando ele estava em trajetória de raio R), podemos escrever $K_0 = \frac{mv_0^2}{2}$. Além dessa equação, também podemos escrever a **conservação do momento angular**, grandeza que se conserva devido a não-existência de forças tangenciais sobre a partícula. A conservação do momento angular nos leva a:

$$m\,v_0\,R = m\,v'\,(R/\eta) \Rightarrow v' = \eta\,v_0$$

Como o trabalho é a variação de energia cinética do sistema, podemos escrever que:

$$W = \frac{m}{2}(v'^2 - v_0^2) = \frac{mv_0^2}{2}(\eta^2 - 1) \Rightarrow \boxed{W = K_0(\eta^2 - 1)}$$