Dióptros Esféricos

Mateus Freitas

1 Apresentação do dióptro esférico

Da semântica da palavra, dióptro trata-se de um sistema ótico com dois meios diferentes. É a partir dele inclusive que surgem as poderosas leis das lentes delgadas(que nada mais são que dois ou mais dióptros em série). Apresentaremos aqui suas pricipais equações e alguns detalhes importantes.

1.1 Pontos importantes

A figura a seguir mostra a estrutura básica dos dióptros esféricos:

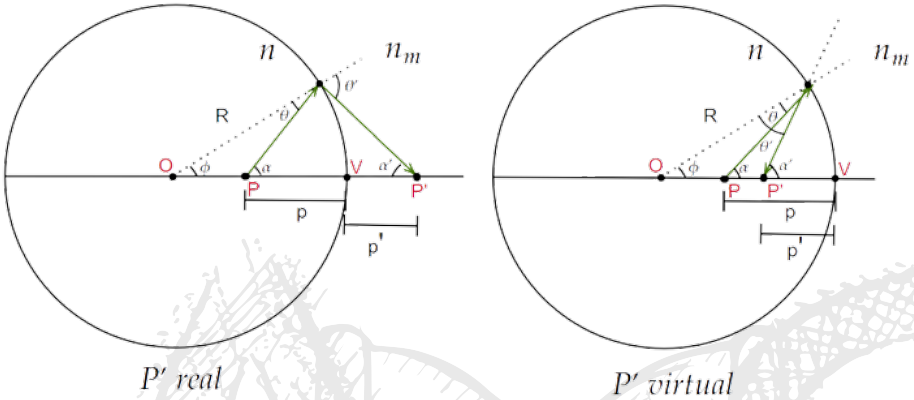

Figura 1: esquema do dióptro.

- Utilizaremos aqui o referencial de Gauus, significa então que se P' é P.I.V, $p' < 0$, e se P' é P.I.R, $p' > 0$.
- O ponto V é chamado de vértice. É a partir dele que analisamos o sinal de p. Pela convenção de Gauus, se P está depois do vértice, $p < 0$ se P está antes, $p < 0$.
- Quanto ao sinal de R, se o centro do dioptro está para o mesmo lado que o objeto em relação ao vértice, então usamos $R > 0$. Se o centro do dioptro está no lado oposto do objeto em relação ao vértice, então usamos $R < 0$.

1.2 Equação do dióptro esférico

Assim como em espelhos esféricos, devemos trabalhar com raios paraxiais, ou seja, vamos considerar que ϕ, α e α' são tão pequenos que seja válida a aproximação: $sin(x) \approx \tan(x) \approx x$. Essas aproximações são necessárias para que tenhamos equações mais simples mas que funcionam muito bem se utilizarmos nas condições corretas(pequenos ângulos) além disso, a menos que seja dito o contrário, essas aproximações podem **sempre** ser utilizadas em qualquer problema que houver dióptros esféricos. Usando a geometria da imagem em que P' é P.I.V:

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{R\sin(\phi)}{p} \approx \frac{R\phi}{p} \tag{1}$$

analogamente:

$$\alpha' \approx \tan(\alpha') = \frac{R\sin(\phi)}{p'} \approx \frac{R\phi}{p'} \tag{2}$$

Além disso, da lei de snnel;

$$n\sin(\theta) = n_m \sin(\theta') \tag{3}$$

Pelo teorema do ângulo externo; $\boxed{\alpha = \phi + \theta}$ e $\boxed{\alpha' = \phi + \theta'}$ assim, usando isso na equação **(3)**:

$$n(\alpha - \phi) = n_m(\alpha' - \phi) \Rightarrow n\phi\left(\frac{R}{p} - 1\right) = n_m\phi\left(\frac{R}{p'} - 1\right)$$

$$\frac{n}{p} - \frac{n_m}{p'} = \frac{n - n_m}{R}$$

Lembre-se aqui que utilizamos a geometria da figura em que P' é imagem virtual. Utilizando o referecial de gauus, $p' < 0$ assim, de modo geral:

$$\boxed{\frac{n_p}{p} + \frac{n_{p'}}{p'} = \frac{n_p - n_{p'}}{R}} \tag{4}$$

Nesta equação agora, p' não é mais simplesmente uma distância mas sim um parâmetro de módulo igual a distância da imagem ao vértice e sinal negativo(caso P' seja P.I.V) ou sinal positvo(caso P' seja P.I.R).

Observação importante: Para saber qual é o índice de refração que multiplica $1/p$ basta olhar em qual meio está localizado o **ponto objeto real**. Análogamente, o índice que multiplica $1/p'$ deve ser o do meio onde o **ponto imagem real** está localizado.

2 Dióptro plano

O interessante do dióptro plano é que ele simplesmente é uma particularização do dióptro esférico. Perceba que para que criemos um plano a partir de uma esfera, basta que usemos uma porção de sua superfície quando $\mathbf{R} \to \infty$ assim como a terra nos parece plana mesmo sendo esférica.

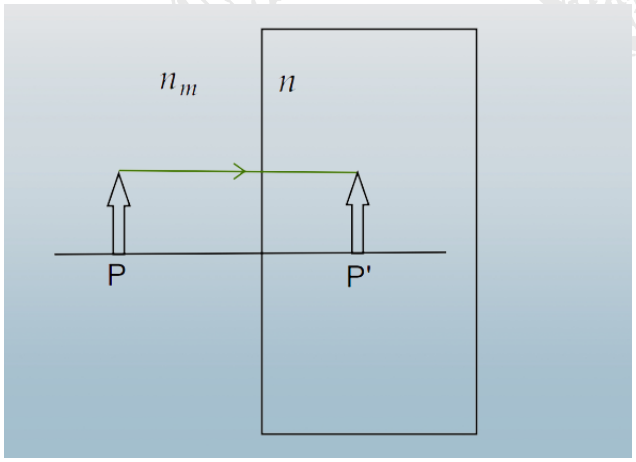

Figura 2: Dióptro plano.

Como já dito, devemos fazer R tender a infinito nas equações. Assim, na equação (4)(perceba sempre que o índice de refração que multiplica $\frac{1}{p}$ é o índice do meio que se localiza o ponto P, por isso nesta imagem os índices são trocados.):

$$\frac{n_m}{p} + \frac{n}{p'} = 0 \Rightarrow p' = -\frac{n}{n_m}.p \tag{5}$$

3 Aumento(A ou M)

Aumento é uma importante grandeza intrínseca de cada dióptro, sua função é explicitar a razão entre a altura de uma imagem e a altura de seu objeto em função dos parâmetros já conhecidos do dióptro(raio e índices de refração) e a distância entre o vértice e o objeto.

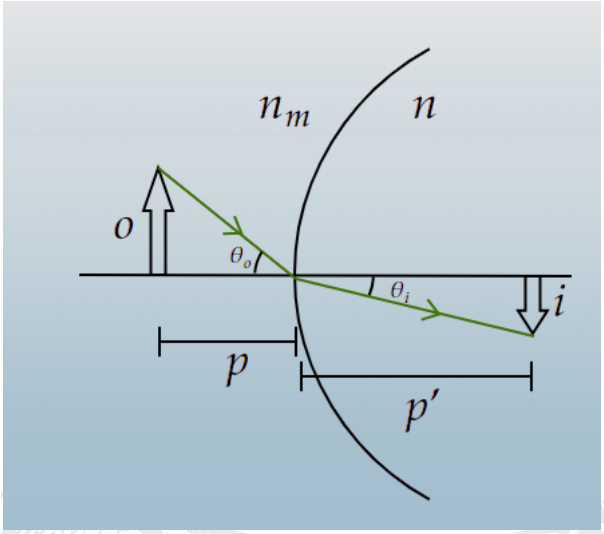

Figura 3: Aumento provocado por um dióptro esférico.

Da definição acima, $M = \frac{i}{o}$. Sabemos também pela lei de snnel(usaremos que $\sin(x) \approx \tan(x)$ para os raios paraxiais):

$$n_m.\frac{o}{p} = n.\frac{-i}{p'} \Rightarrow \boxed{M = -\frac{n_m}{n}.\frac{p'}{p}} \tag{6}$$

OBS: perceba aqui que se quisermos calcular o aumento do dióptro plano encontraremos $M = 1$, isto é, a altura da imagem é a mesma do objeto para qualquer que seja p e p'.

4 Exercícios

Questão 1.*

A figura desse problema mostra uma lâmpada pendurada a uma distância d_1 acima da superfície da água de uma piscina(de índice de refração n) na qual a profundidade da água é de d_2. O fundo da piscina é um espelho. A que distância da superfície do espelho está a imagem da lâmpada?

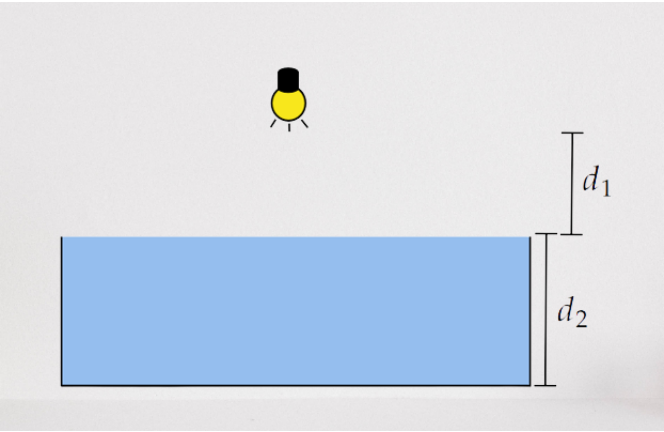

Figura da questão 1.

Gabarito: $d_1 - d_2 + \dfrac{2d_2}{n}$

Questão 2.

Um peixe dourado em um aquário esférico, de raio R, está na mesma horizontal que o centro C do aquário, a uma distância $R/2$ do vidro (figura a seguir). Que ampliação do peixe é produzida pela água do aquário para um observador alinhado com o peixe e o centro do aquário, com o peixe mais próximo do observador que o centro do aquário? O índice de refração da água é n. Despreze o efeito da parede de vidro do aquário. Suponha que o observador está olhando para o peixe com um só olho.

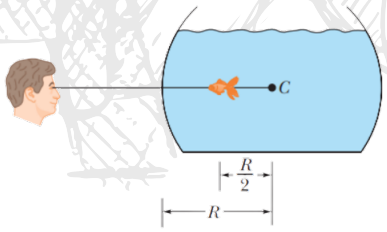

Figura da questão 2.

Gabarito: $M = -\dfrac{2n}{n+1}$

Questão 3.

Uma vela dista d do vértice de um dióptro esférico de raio R. Sabendo que a altura da vela é h e o índice de refração relativo deste dióptro é ε, encontre a altura da imagem produzida.

Gabarito: $h' = \dfrac{hR}{d(\varepsilon - 1) - R}$.

Questão 4.

Qual deve ser o índice de refração de uma esfera transparente para que os raios paraxiais provenientes de um objeto no infinito sejam focalizados no vértice da superfície oposta ao ponto de incidência?

Gabarito: $n = 2$