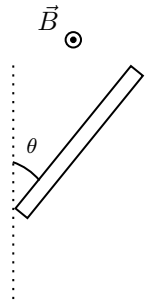
Soluções Simulado OBF - Fase 3 Nível 3

Autor: Gustavo Valente

Tabela de Constantes

Constante	**Valor**
Velocidade da Luz (c)	$299.792.458\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck (h)	$6,62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Constante Gravitacional (G)	$6,67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Carga do Elétron (e)	$1,602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann (k)	$1,380649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Número de Avogadro (N_A)	$6,02214076 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Rydberg (R_∞)	$1,097373 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
Raio do Sol	$696.340\,\mathrm{km}$
Calor Latente da Água	$334.000\,\mathrm{J/kg}$
Calor Sensível da Água	$4.186\,\mathrm{J/g \cdot K}$
Permissividade Elétrica do Ar (α)	$8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Temperatura de Fusão do Alumínio	$660,32\,^\circ\mathrm{C}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,670374419 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$
Massa do Sol	$2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
1 Ano luz	$9.5 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

1. Uma barra condutora de comprimento L é abandonada de um ângulo θ de uma posição de equilíbrio instável em relação à vertical. Nesta região existe um campo magnético saindo do plano da folha, e a velocidade angular neste instante vale ω:



(a) Qual a diferença de potencial entre os pontos da extremidade da barra?

(b) Agora, numa segunda situação, o campo magnético foi retirado do local, e por onde passa uma linha vertical, agora passa uma corrente apontando para cima. Isso vai ocasionar uma mudança de velocidade angular da barra, e consequentemente mudando o contexto da situação. Com base nessas informações, determine a força eletromotriz entre as extremidades da barra neste segundo caso.

Solução:

(a) Para uma base condutora se mexendo num campo magnético, teremos naturalmente o comportamento das cargas se alinhando ao campo, ou seja, entre as extremidades deverá haver um equilíbrio entre força elétrica e força magnética para que esse alinhamento ocorra:

$$F_{mag} = F_{el}$$
$$qE = qvB$$

Mas podemos escrever v como:

$$v = \omega r$$

Logo:

$$qE = q\omega rB$$
$$E = \omega rB$$

Da eletrostática, sabemos que:

$$V = -\int Edr$$

Substituindo o valor do campo elétrico encontrado anteriormente, teremos:

$$V = -\int \omega B r dr$$
$$V = -\int_0^L \omega B r dr$$
$$V = -\frac{\omega B L^2}{2}$$

(b) No segundo caso descrito, não temos a presença de um campo magnético no local, mas sim uma corrente apontando para cima na vertical, induzindo um campo magnético na barra. A primeira coisa a se notar neste segundo caso, é que a velocidade angular não será mais a mesma, e precisaremos calcular a nova velocidade angular da barra. Podemos fazer isso conservando energia. Inicialmente a barra possui uma parcela de potencial gravitacional, que é dissipado em energia cinética rotacional. Podemos equacionar isso da seguinte forma:

$$mG\frac{L}{2}(1-\cos\theta) = \frac{I\omega'^2}{2}$$

Substituindo o valor do momento de inércia de uma barra, que é dado por: $I = ML^2/3$, teremos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\omega'^2 = mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$
$$\frac{L}{3}\omega'^2 = g(1-\cos\theta)$$
$$\omega' = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

Agora, podemos encontrar o valor do campo magnético induzido nessa barra por conta da corrente. Sabemos que o campo será da forma:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Em que d será a distância apontando para o ponto que estamos interessados, que no caso, será na direção radial, logo:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \operatorname{sen}\theta}$$

Agora, sabendo que $v = \omega' r$, e que a força eletromotriz induzida é dada por:

$$\epsilon = \int B\omega' r dr$$

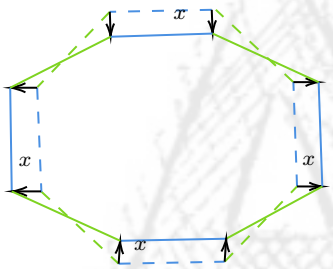
Substituindo os valores do campo e da velocidade angular, teremos:

$$\epsilon = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r \operatorname{sen}\theta}\sqrt{\frac{3g(1=\cos\theta)}{L}}rdr$$
$$\epsilon = \frac{\mu_0 I}{2\pi \operatorname{sen}\theta}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}L = \frac{\mu_0 I}{2\pi \operatorname{sen}\theta}\sqrt{\frac{3gL^2(1-\cos\theta}{L}}$$
$$\epsilon = \frac{\mu_0}{2\pi \operatorname{sen}\theta}\sqrt{3gL(1-\cos\theta)}$$

2. Um octágono feito por oito barras homogêneas de massa m e comprimento l, está inicialmente em repouso sob o plano de uma mesa. As barras são corpos rígidos, porém o ângulo ψ entre cada barra pode variar sem atrito, mas retornando um torque $\tau = k\left(\psi - \frac{3}{4}\pi\right)$, que vai aparecer nessas conexões entre as barras assim que elas saírem de seu ângulo de equilíbrio, que vale $\frac{3}{4}\pi$. Determine o período para pequenas oscilações desse octágono.

Solução:

Para pequenas oscilações, podemos desenhar os seguinte caso:



Todas as barras sofrem movimento translacional, mas as barras azuis sofrem um movimento de x<<l na direção paralela à elas, e as verdes, sofrem um deslocamento de x/$\sqrt{2}$ paralelo à elas. Com isso, podemos saber que cada barra verde foi rotacionada com um ângulo de $\theta = \sqrt{2}x/l$, logo, podemos escrever o potencial do sistema como:

$$V = 8\frac{1}{2}k\theta^2 = 4k\left(\frac{\sqrt{2}x}{l}\right)^2 = 8\frac{k}{l^2}x^2$$

E a energia cinética dada por:

$$K = 4\cdot\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 4\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$K = 2m\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ml^2\frac{2\dot{x}^2}{l^2} = \frac{10}{3}m\dot{x}^2$$

Logo, a frequência para pequenas oscilações será:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8\frac{k}{l^2}}{\frac{10}{3}m}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12}{5}\frac{k}{ml^2}}$$
$$T = f^{-1} = 2\pi\left(\frac{12}{5}\frac{k}{ml^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

3. Duas partículas estão em uma órbita circular sob a influência de forças gravitacionais, com um período T. O movimento é parado drasticamente em um dado instante de tempo, e as partículas são soltas e deixadas para colidir entre si. Quanto tempo demorará a partir deste instante, até que as duas partículas colidam entre si?

Solução:

Quando as partículas começarem o movimento para colisão entre elas, isso pode ser considerado como um caso de elipse degenerada, em que um dos focos da elipse será o ponto de impacto. Logo, teríamos o período T para a órbita circular, e $\tau/2 = t'$ para o tempo até a colisão, pois será metade do período dessa elipse formada para a colisão. Temos também que quando as partículas são paradas de seu movimento circular e deixadas para colidirem, a energia é dobrada. Isso ocorre porque quando as partículas são paradas drasticamente, elas perdem energia cinética, aumentando o potencial, e já que o potencial tem uma dependência de 1/r, a energia será dobrada. Logo, para uma órbita circular, teremos:

$$E_i = \frac{V_I}{2}$$

E no instante em que a partícula é parada, e a energia é inteiramente potencial, teremos:

$$E_f = V_i = 2E_i \tag{1}$$

Logo, pela lei de Kepler,sabemos que o período de uma órbita é proporcional a $E^{-\frac{3}{2}}$ podemos escrever que:

$$\frac{t}{\frac{\tau}{2}} = \left(\frac{E_i}{E_f}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{t}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_i}{E_f}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{t}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}$$

4. Uma pedra de massa m=0.5kg é amarrada numa corda de comprimento L=5.6m e logo após sofre a ação de uma velocidade horizontal $v_0 = 14m/s$. A corda pode aguentar uma força de até 40N

sem partir. Onde a pedra estará quando a corda romper? Use g=$10m/s^2$

Solução:

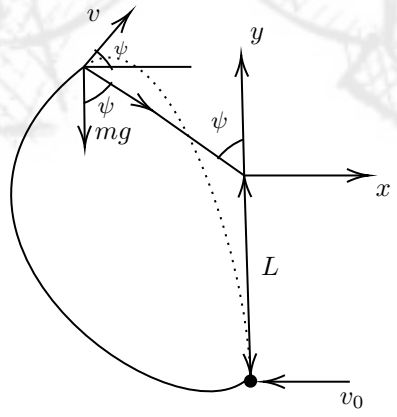
O objeto se move em um trajeto circular vertical, durante o qual a tensão na corda diminui. A tensão máxima ocorre na parte inferior do círculo, ou seja, no início do movimento. Se a corda não se romper no início, existem duas possibilidades: 1: Se a velocidade inicial for suficiente para fazer o objeto se movimentar ao redor do círculo sem que a corda fique frouxa, ela nunca se romperá. 2: Se o objeto sair do caminho circular em um ponto específico (onde a corda fica frouxa), ele seguirá um MRUV até retornar ao caminho circular, onde a corda ficará tensa novamente. Nesse caso, supondo que a corda não seja elástica, a tensão na corda será extremamente alta (muito acima dos 40N máximos) e, devido ao puxão repentino, a corda se romperá. Nesse cenário, a solução está na interseção entre o trajeto parabólico e o círculo.

Primeiro vamos olhar para o caso da tensão no início. Podemos ter o valor da tensão exercida na corda no início igualando as forças à resultante centrípeta:

$$T - mg = \frac{mv_0^2}{L}$$
$$T = m\left(\frac{v_0^2}{2} + g\right) = 22.5N$$

Logo, a corda não romperá no primeiro caso, e a solução que nós estamos buscando é a segunda.

No segundo caso, estamos falando de dar um primeiro impulso na pedra, ela chegar até um certo ponto em que a corda fica frouxa, e a partir dali ela vai cair, e quando cair ela vai ter mais um pico de tensão. Para a corda ficar frouxa, precisamos de uma tração nula nesse ponto. Vamos desenhar uma esquematização da situação para deixar mais claro:



Aqui podemos enxergar em tracejado a trajetória parbólica, e a trajetória circular em preto(desenho fora de escala). Escrevendo a segunda lei de Newton para o ponto em que a tração será zero, teremos:

$$mg\cos\psi = \frac{mv^2}{L}$$

A velocidade nesse ponto pode ser obtida por meio da conservação de energia do sistema:

$$-mgL(1+\cos\psi) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$
$$v^2 = v_0^2 - 2gL(1+\cos\psi)$$

Substituindo isso na equação de forças, e dividindo por m, nos dá:

$$g\cos\psi = \frac{v_0^2}{L} - 2g(1+\cos\psi)$$
$$3\cos\psi = \frac{v_0^2}{gL} - 2$$

Logo, podemos isolar o cosseno para descobrir o ângulo em que a pedra deixou a trajetória circular:

$$\cos\psi = \frac{v_0^2}{3gL} - \frac{2}{3} = \frac{14^2}{3\cdot 10\cdot 5.6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo que ele deixa a trajetória circular é de 60 graus. A velocidade de lançamento do projétil a partir deste ponto pode ser calculada substituindo o valor do ângulo na velocidade encontrada na conservação de energia:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gL(1+0.5)} = \sqrt{14^2 - 2\cdot 10\cdot 5.6\cdot 1.5}$$
$$v = \sqrt{28} \approx 5.29m/s$$

Pela figura, as coordenadas em x e y da pedra no momento em que ela deixa a trajetória circular, são:

$$x_0 = -L\,\mathrm{sen}\,\psi$$
$$y_0 = L\cos\psi$$

E a equação do círculo definido pelas coordenadas da figura é:

$$L^2 = x^2 + y^2$$

E as coordenadas da pedra em função do tempo são:

$$x = x_0 + v\cos\psi t = -L\,\mathrm{sen}\,\psi + v\cos\psi t$$
$$y = y_0 + v\,\mathrm{sen}\,\psi t - \frac{gt^2}{2} = L\cos\psi + v\,\mathrm{sen}\,\psi t - \frac{gt^2}{2}$$

Substituindo esses valores na equação do círculo, teremos:

$$L^2\,\mathrm{sen}^2\,\psi - 2Lv\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi t + v^2\cos^2\psi t^2 + L^2\cos^2\psi + v^2\,\mathrm{sen}^2\,\psi t^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$$
$$+2Lv\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi t - 2L\cos\psi\frac{1}{2}gt^2 - 2v\,\mathrm{sen}\,\psi\frac{1}{2}gt^3 = L^2$$

Sabendo que $L^2 \operatorname{sen}^2 \psi + L^2 \cos^2 \psi = L$ e que $v^2t^2 \operatorname{sen}^2 \theta + v^2t^2 \cos^2 \psi = v^2t^2$, e cancelando o segundo com o sétimo termo, temos:

$$v^2t^2 + \frac{1}{4}gt^4 - L\cos\psi gt^2 - v \operatorname{sen}\psi gt^3 = 0$$

Dividindo ambos os lados por t^2, teremos:

$$\frac{1}{4}g^2t^2 - v \operatorname{sen}\psi gt + (v^2 - L\cos\psi g) = 0$$

Que é uma equação do segundo grau em t, que quando resolvida, nos retorna raízes de:

$$t_1 = 1.833$$
$$t_2 \approx 0$$

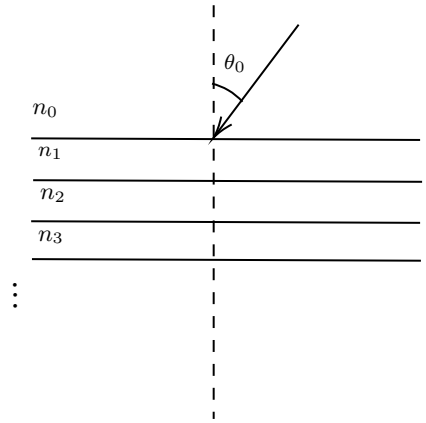
Substituindo o valor de t_1 nas coordenadas de x e y:

$$x = (-5.6 \cdot 0.866 + 5.292 \cdot 1.833 \cdot 0.5) \approx 0$$
$$y = (5.6 \cdot 0.5 + 5.292 \cdot 0.866 \cdot 1.833 - 5 \cdot 1.833^2) = -5.6m = -L$$

Ou seja, chegamos num resultado um tanto quanto bonito aqui. A corda irá se romper quando ela após a corda afrouxar, voltar para baixo e ter um pico de tensão quando estiver numa posição -L da origem.

5. A "Miragem"é um fenômeno óptico em que consiste no fato de que a pessoa, ao ver o "céu"refletido na camada de ar proximo à superfície da areia do deserto, pode indentificar essa reflexão como um poço de água. Num modelo simplificado que explica esse fenômeno, se considera que existem varias camadas de ar com diferentes índices de refração acima da superfície da areia.

   Considere um raio de luz que incide na primeira camada fazendo um ângulo θ_0 com a vertical. Supondo que cada camada tem espessura d e que a i-ésima camada abaixo tenha índice de refração $n_i = 0.99n_{i-1}$. Se a primeira das camadas tiver índice de refração n_0, qual deve ser a altura da camada de ar para que aconteça a reflexão total do feixe de luz incidente?



Solução:

Podemos aplicar a Lei de Snell para cada uma das camadas, iniciando pela primeira, ou seja:

$$n_0 \operatorname{sen}\theta_0 = n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 ...$$

Tal que ao final de N camadas, temos:

$$n_0 \operatorname{sen}\theta_0 = (0.99)^N n_0 \operatorname{sen}\theta_N$$

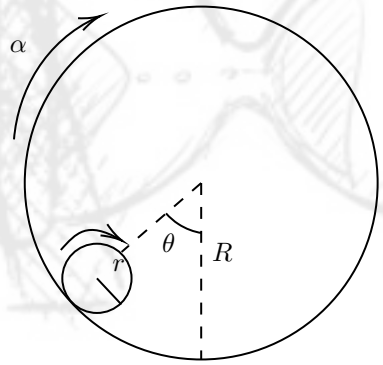
Para que ocorra a reflexão total, devemos ter $\operatorname{sen}\theta_N = 1$, logo:

$$N = \frac{\log \operatorname{sen}\theta_0}{\log 0.99}$$

Dessa forma, a espessura da camada deve ser de Nd:

$$D_{tot} = \frac{\log \operatorname{sen}\theta_0}{\log 0.99} \cdot d$$

6. Uma esfera de raio r e massa m é colocada no interior de um cilindro de raio R cujo eixo permanece na hotizontal. O cilindro rota em torno de seu eixo com aceleração angular constante α, e a esfera pode rolar livremente pelo seu interior. Determine o ângulo θ para que a esfera permaneca rolando no cilindro sem que seu centro mude de posição.



Solução:

Podemos primeiro escrever como será a componente do peso da esfera, que agirá como normal no cilindro, exercendo torque, que será de:

$$f = mg \operatorname{sen}\theta$$

Podemos escrever então a equação geral do torque para a esfera:

$$\alpha_e \cdot I_e = f \cdot r$$
$$\alpha_e = \frac{fr}{I}$$

Agora, para a condição de não deslizamento entre a esfera e o cilindro(sabendo que o momento de inércia de uma esfera oca é de $2/5\mathrm{m}r^2$), temos:

$$\alpha_e \cdot r = \alpha_c \cdot R$$
$$\frac{mg \operatorname{sen}\theta r}{\frac{2}{5}mr^2} \cdot r = \alpha_c R$$
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2R\alpha}{5g}\right)$$

7. Uma gota de metal líquido tem densidade de massa constante e tensão superficial igual a σ, que faz a gota se formar numa esfera de raio R. Um fio muito estreito é colocado dentro da gota e é conectado a uma fonte de corrente elétrica que carrega lentemente a gota. Existe um valor crítico de carga, Q_0, que faz a gota se partir ao meio. Cada metade tem a carga de $\frac{Q_0}{2}$ e metade da massa da gota original. A metade ejetada é repelida para longe pela outra metade que permanece em contato com o fio.

   (a) Qual o valor de Q_0? Escreva sua resposta em termos de uma constante adimenssional A, multiplicado por um produto de potências de σ, R, e a permissividade do vácuo, ϵ_0.

   (b) Encontre o valor de A.

Solução:

(a) Perceba que σ tem dimensao de energia/compprimento^2, R tem unidade de comprimento, e ϵ tem unidade de carga^2/(energia $\cdot$ comprimento), logo, por análise dimensional, a única combinação de potências possíveis para conseguirmos uma dimensão de carga é:

$$Q_0 = A\sqrt{\epsilon_0 \cdot \sigma \cdot R^3}$$

(b) Para encontrar o valor de A, note que a energia devido à tensão superficial da gota de raio R será de $4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma$, e um potencial eletroestático de $Q_0/2C$, em que $C = 4\pi R\epsilon_0$ é a capacitância de uma esfera condutora. Logo, a energia total da gota é de:

$$E_0 = 4\pi R^2\sigma + \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Quando a gota se parte ao meio, a carga passa a ser de $Q_0/2$ e o raio $R_1 = R/2^{\frac{1}{3}}$, pois o volume se conserva. Logo, a energia total de cada metade é de:

$$E_1 = 4\pi\sigma R_1^2 + \frac{(Q_0/2)^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}$$

Logo, podemos dizer que $E_0 = 2E_1$, e resolver isolando A, nos deixando com:

$$A = 8\pi\sqrt{\frac{2^{\frac{1}{3}-1}}{2-2^{\frac{1}{3}}}}$$
$$A \approx 14.9$$

(Na prova teórica, apenas a primeira forma mostrada de A já seria necessário para pontuação integral.)

8. Para corrigir problemas que podem ser gerados por campos eletromagnéticos induzidos em navios, acarretando numa desorientação das bússolas do navio, existe um dispositivo que consiste em um par de bolas de metal, colocado no mesmo plano da bússola do navio, com uma distância d entre elas:

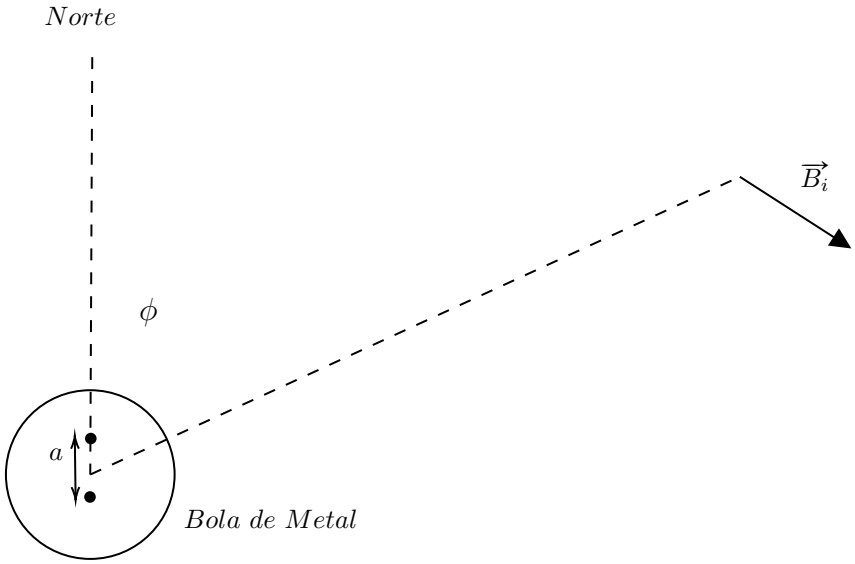
Figura 1: Uma bitácula, protegendo a bússula do navio, no centro, de qualquer potencial desorientação. O uso desse dispositivo foi sugerido pelo Lord Kelvin

Assim como o navio inteiro, as bolas vão se magnetizar por conta do campo magnético da Terra, B_t. Como esferas, cada uma das bolas atua como um dipolo. Um dipolo pode ser entendido como o campo produzido por dois monopolos magnéticos de força ±m em dois pontos diferentes.

O campo magnético de um único polo é dado por:

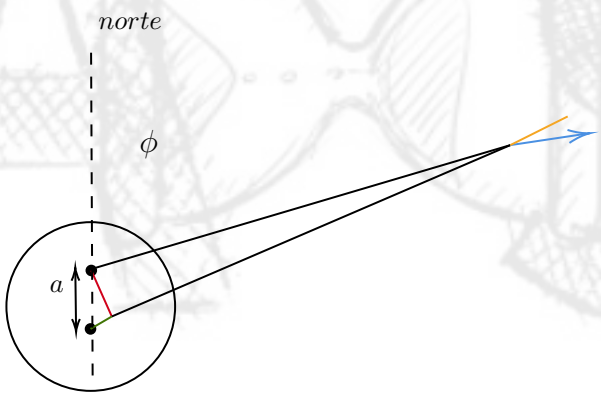
$$\vec{B} = \pm m \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Em que o sinal positivo é dado para o polo norte, e o sinal negativo para o polo sul. O campo de um dipolo magnético é a soma dos dois polos: um polo norte em y=+a/2, e um polo sul em y=-a/2, em que o eixo y é horizontal(sim, horizontal) e aponta para o norte. a é uma distância muito menor do que o raio das bolas; em geral, $a = K_i B_b$, em que K_i é uma constante que depende das dimensões da bola.



Encontre uma expressão para o campo magnético B_i, do metal a uma distância $d >> a$do centro da bola. Note que haverá uma componente do campo apontando radialmente para fora da bola, e uma componente tangente à um círculo de raio d em volta da bola, então o uso de coordenadas polares é recomendado.

Solução:



Considere o triângulo colorido acima. O lado preto tem tamanho a, o ângulo entre o lado verde e o lado preto é ϕ, então o comprimento do lado vermelho é dado por $a \operatorname{sen} \phi$, e o comprimento do lado verde é $a \cos \phi$.

A intensidade do campo magnético de um polo a uma distância d de um ponto é dada por:

$$B = \pm \frac{m}{d^2}$$

A soma dos dois campos tem duas componentes. A componente angular é uma medida de "abertura"do triângulo formado pelos dois vetores, e já que os dois vetores tem praticamente o mesmo comprimento, podemos usar semelhança de triângulos para escrever:

$$\frac{a \operatorname{sen} \phi}{d} = \frac{B_\phi}{B} \Rightarrow B_\phi = m \frac{a}{d^3} \operatorname{sen} \phi = B_b \frac{mK_i}{d^3} \operatorname{sen} \phi$$

Como esperado, a componente angular do campo zera para $\phi = 0$. A componente radial é dada pela diferença entre os comprimentos dos dois vetores dos campos:

$$B_r = m\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right)$$
$$B_r = \frac{m}{d^2}\left(1 - \frac{1}{(1+x/d)^2}\right) \approx \frac{m}{d^2}\frac{2x}{d}$$

Em que $x = a\cos\phi$ é o comprimento do lado verde, então, teremos:

$$B_r = 2B_b\frac{mK_i}{d^3}\cos\phi$$